УДК 330.46

Н. А. Красовский*, А. М. Тарасьев**

Анализ проблемы снижения атмосферных загрязнений в рамках игровой модели аукционного типа

Рассматривается проблема снижения атмосферных загрязнений в рамках игровой модели переговорного процесса. Переговорный процесс представляется в виде аукциона, в котором информационное бюро (аукционер) собирает информацию от стран – участников аукциона о возможностях снижения эмиссий и формирует ценовые предложения. Страны-участники максимизируют собственные функции полезности в ответ на предложенные цены. В рамках аукционной модели вводится понятие рыночного равновесного решения, сочетающего конкурентные и кооперативные свойства. Предлагается алгоритм нахождения рыночного равновесия, который иллюстрируется игровой ситуацией между странами Европейского Союза и Россией.

Ключевые слова: модели снижения загрязнений; динамические игры; равновесные ситуации; алгоритмы поиска равновесия.

Введение. В работе рассматривается игровая модель аукционного типа, связанная с нахождением точек равновесия. Такие равновесные точки обладают как конкурентными, так и кооперативными свойствами. Рассматриваемая постановка имеет основание в реальных экономических процессах, в которых поиск равновесия производится при обмене информацией между игроками. Например, к такой постановке относится проблема нахождения обменного равновесия между агентами, которые производят и потребляют общественные блага. Другим примером может являться переговорный процесс аукционного типа. В этих процессах оценки и производственные стоимости каждого из агентов неизвестны другим. Каждый игрок может только сотрудничать, участвуя в производстве общественного блага (сотрудничество в виде денежного платежа не допускается). В качестве примера можно указать на события в Нидерландах, где жители местности, находящейся под угрозой затопления, объединили усилия в сооружении плотин. В качестве другого примера можно привести многосторонние переговоры об обоюдном разоружении. Важным примером являются переговорные процессы по снижению эмиссий вредных веществ в атмосферу.

В данной работе внимание уделяется, главным образом, международному сотрудничеству по защите окружающей среды. Многие сотрудничества такого рода имеют форму соглашений между правительствами стран по обоюдному снижению эмиссий парниковых газов на трансграничных территориях. Примерами могут служить Второй Протокол о сокращении выбросов серы (1994 год), Киотский Протокол (1997) и Копенгагенская конференция ООН по изменению климата (2009). Обязательства протоколов могут сильно варьироваться. Например, во Втором Протоколе о сокращении выбросов серы запланировано снижение к 2010 году

* **Николай Андреевич Красовский,** канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий и математического моделирования, ФГБОУ ВО Уральский государственный аграрный университет (г. Екатеринбург).

E-mail: nkrasovskiy@gmail.com

** **Александр Михайлович Тарасьев,** д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры менеджмента и маркетинга, АНО ВО «Гуманитарный университет»; заведующий отделом динамических систем Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).

E-mail: tam@imm.uran.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ 14-01-00486а, проекта УрО РАН 15-16-1-13.

совокупного среднего уровня выбросов на 87 % по сравнению с 1980-м. Цель же ограничений Киотского Протокола – снижение выбросов к 2012 году на 5,2 % по сравнению с уровнем 1990-го.

Такая разница в цифрах ставит вопрос о том, возможно ли разработать процедуры для улучшения процесса переговоров, которые уточняли бы параметры соглашений, приемлемые для всех участников.

В экономической теории нередко пренебрегают такого рода проблемами. В основном экономисты рассматривают вопрос существования стимула для участия в соглашении. Такие выводы о создании коалиции и ее стабильном состоянии обсуждаются в работе [12]. Более близки к нашей теме работы [13; 18], в которых предлагаются алгоритмы нахождения равновесных решений. Такие конструкции определяют обязательства участников по снижению эмиссий. Недостаток такого подхода состоит в том, что денежные трансферы между участниками вовлечены в поиск кооперативного решения.

Наше внимание сконцентрировано, главным образом, на случае обоюдного трансграничного загрязнения, при котором страны «платят» друг другу снижением эмиссий в качестве «услуги за услугу».

С математической точки зрения рассматривается задача динамической некооперативной игры [1–3; 9–11] нескольких участников, в которой игроки (правительства соседних стран) осуществляют торговлю квотами по снижению эмиссий парниковых газов. Вводится определение рыночного равновесия, комбинирующего свойства равновесий Нэша и Парето [1–2]. Предлагается алгоритм поиска рыночного равновесия, который сдвигает конкурентное равновесие по Нэшу к кооперативному максимуму Парето в эволюционной динамике [5; 9]. Алгоритм интерпретирован в форме повторяющегося аукциона, в котором аукционер не имеет информации о функциях затрат и функциях экологического эффекта от снижения выбросов для стран-участников. Участники аукциона не располагают информацией о функциях затрат и функциях экологического эффекта других стран-участников. В каждом раунде аукциона участникам предлагаются индивидуальные ставки по снижению выбросов. Участники по предлагаемым ставкам производят максимизацию своих функций полезности и передают аукционеру свои наилучшие ответы. Рассматривается стратегия аукционера, которая создает условия достижения рыночного равновесия. С точки зрения теории игр повторяющийся аукцион описывает процесс обучения в некооперативной повторяющейся игре при дефиците информации [4; 10; 15].

Разработанный алгоритм реализован в программном комплексе, созданном в среде MATLAB. Предлагаемая разработка ориентирована на построение равновесных решений в играх аукционного типа, в которых конструируются оптимальные пропорции по снижению загрязнений в целях защиты окружающей среды. Для компьютерного эксперимента рассматривалась игровая ситуация между странами Европейского Союза и Россией. В рамках сотрудничества с Международным институтом прикладного системного анализа (IIASA, Австрия) были получены реальные данные о функциях затрат и функциях экологического эффекта и на основе этого калиброваны их параметры модели.

Описание модели. В работе представлена комбинация математической модели некооперативных игр и экономической модели «торговли» [6–8; 16–17; 19–20] между соседними странами, при которой «товаром» являются снижения эмиссий парниковых газов соседних стран. Основная идея заключается в том, что страна i желает снизить эмиссии на своей территории лишь в случае если в обмен на это она получает достаточное снижение загрязнений, «импортированных» из соседних стран, $i = 1,...,n$. Каждая страна стремится максимизировать свою функцию полезности, в которой затраты на снижение эмиссий сбалансированы с пользой от экологического эффекта.

Проблема, которую предстоит решить аналитически, состоит в том, существует ли состояние равновесия при таком многостороннем обмене снижения эмиссий. Назовем такое состояние «рыночным равновесием». При существовании такого равновесия следующий вопрос состоит в том, при каких условиях такое решение оптимально согласно максимуму Парето [1–2].

Алгоритмы сформулированы в виде элементов аукциона. Аукционер предлагает конкретные для каждой страны цены или обменные курсы, которые определяют количественное снижение эмиссий на собственную территорию, которое страна i получит за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Страны-участники отвечают одновременно, определяя снижение эмиссий, которые они желают произвести за предлагаемую цену. В переговорном процессе аукционер имеет информацию о коэффициентах перемещения эмиссий между странами-участниками. Он использует их, чтобы перевести снижение эмиссий, предложенных странами, в итоговую загрузку конкретной страны загрязнениями. Аукционер не имеет точной информации о функциях полезности стран-участников. У него могут быть лишь приблизительные оценки темпов их роста. Аукционер учитывает предложенные странами-участниками снижения эмиссий и текущее загрязнение и сравнивает их с требуемыми. В случае большого отклонения между «предложением» и «спросом» он предлагает новые цены. Со своей стороны, участники отвечают снижением эмиссий, опираясь лишь на свои функции полезности. С математической точки зрения аукцион можно интерпретировать как декомпозиционный алгоритм поиска равновесия [6]. Отметим, что в работе [7] даны технические детали алгоритма, которые здесь находят свои приложения для экономической игровой ситуации по торговле эмиссиями между странами Европейского Союза и Россией.

Предложенная торговля снижением эмиссий с точки зрения теории игр может рассматриваться как некооперативная игра между странами. Ситуация рыночного равновесия рассматривается как одна из приемлемых в игре и представляет собой комбинацию классических понятий равновесия по Нэшу и Парето.

Ситуации равновесия. Мы имеем дело с моделью торговли снижением эмиссий. В модели задействовано n стран и аукционер. Каждая страна i контролирует собственную величину снижения эмиссий, $x_i \geq 0$. Страна i заинтересована в максимизации собственной функции полезности w_i, заданной формулой

$$w_i(x) = -C_i(x_i) + B_i\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_j\right). \tag{1}$$

Здесь $x = (x_1, ..., x_n)$ – полный вектор снижения эмиссий, $C_i(x_i)$ – функция затрат страны i на снижение эмиссий x_i, $B_i\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_j\right)$ – функция экологического эффекта, который получает страна i благодаря общему снижению загрязнения на ее территории, $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_j$, и a_{ji} – это транспортный коэффициент, т. е. часть промышленных выбросов страны j, перенесенных на территорию страны i. Предполагается, что $a_{ji} > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_j \leq 1$. Каждая функция затрат C_i выпукла и монотонно возрастает. Каждая функция экологического эффекта B_i строго вогнута и монотонно возрастает, а также имеется уровень насыщения $\overline{y_i}$, который остается постоянным на интервале $\left[\overline{y_i}, \infty\right)$. Считается, что функции C_i и B_i дважды дифференцируемы, что подразумевает

$$C_i'(x_i) > 0\,,\ C_i''(x_i) \ge 0\ \left(x_i \ge 0\right); \tag{2}$$

$$B_i'(y_i) > 0\,,\ B_i''(y_i) < 0\ \left(0 \le y_i \le \overline{y_i}\right),\ B_i'(y_i) = 0\ \left(y_i \ge \overline{y_i}\right). \tag{3}$$

Мы видим процесс нахождения вектора снижения эмиссий x как некооперативную игру между странами с участием n игроков. Допустимые стратегии страны i – снижение эмиссий $x_i \ge 0$, а функция полезности w_i. Мы предполагаем, что при торговле снижениями эмиссий (на международных переговорах), что эквивалентно поиску решения игры, делегат от страны i полностью информирован о транспортной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а также о функции полезности страны, которую он представляет (w_i). И практически не имеет информации о функциях полезности других стран. Участники начинают игру с начальным вектором снижения эмиссий $x^0 = 0$. Вектор снижения эмиссий $x = \left(x_1, \dots, x_n\right)$ положителен, если $x_1, \dots, x_n$ положительны.

Предположим, что рыночное равновесие является желаемым решением игры.

Определение 1. Назовем *рыночным равновесием* вектор положительного снижения эмиссий $x^M = \left(x_1^M, \dots, x_n^M\right)$, если для каждой страны i функция $w_i\left(x^M\right)\ \left(\lambda > 0\right)$ достигает максимума при $\lambda = 1$,

$$x_1^M = \arg\max\left\{w_i(\lambda x^M) : \lambda > 0\right\},$$

что эквивалентно

$$\frac{dw_i(\lambda x^M)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} = 0\ \ (i = 1, \dots, n)\,. \tag{4}$$

Отношение (4) показывает, что x^M является решением уравнений

$$\left\langle \nabla w_i\left(x\right), x\right\rangle = 0\ \left(i = 1, \dots, n\right), \tag{5}$$

где $\left\langle \dots \right\rangle$ означает скалярный продукт n-мерного векторного пространства.

Учитывая определение w_i (1), уравнение (5) можно представить в виде

$$-x_i C_i'(x_i) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j \right) B_i' \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j \right) = 0 \ (i = 1,...,n). \tag{6}$$

Уравнение (6) описывает множество n кривых. Они показывают, какое снижение эмиссий x_i желает осуществить страна i взамен на ответное снижение $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j$, которое она получает благодаря снижению эмиссий всеми другими странами.

Коэффициент

$$p_i = p_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j}{x_i} \tag{7}$$

определяет обменный курс (для вектора снижения эмиссий x). Он показывает количественное снижение на собственную территорию, которое страна i получит за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Используя обменный курс, представим (6) как

$$-C_i'(x_i) + p_i B_i'(p_i x_i) = 0 \tag{8}$$

и таким образом перейдем к следующей характеристике рыночного равновесия: вектор положительных снижений эмиссий x называется рыночным равновесием тогда и только тогда, когда он является решением системы алгебраических уравнений (8), в которой p_i задано формулой (7).

Основной задачей исследований является разработка алгоритмов построения ситуаций рыночных равновесий (4)–(8).

Компьютерное моделирование. Алгоритм реализован в программе, написанной в среде MATLAB. Для компьютерного эксперимента рассматривается игровая ситуация между странами Европейского Союза (*EU*) и Россией (*RU*). Аналогично работам [14; 21] идентифицируются функции затрат (C_{EU}, C_{RU}) и функции экологического эффекта (B_{EU}, B_{RU}) и эконометрически калибруются их коэффициенты.

Пользуясь формулой (1), представим полученные функции полезности для этих стран (w_{EU}, w_{RU}) в виде уравнений

$$w_{EU}(x_1, x_2) = -\frac{e_1}{2} x_1^2 - c_1 + d_1 \ln(a_{11} x_1 + a_{21} x_2);$$

$$w_{RU}(x_1, x_2) = -\frac{e_2}{2} x_2^2 - c_2 + d_2 \ln(a_{12} x_1 + a_{22} x_2).$$

Для рассматриваемой модели на основе реальных данных построены ситуации равновесия по Нэшу *NE* и множество точек максимума по Парето *PM*. На рис. 1 показано, что в множестве точек максимума по Парето имеются как точки, доминирующие точку равновесия Нэша по обоим критериям (выделены жирной линией), так и точки, не обладающие этим свойством (указаны тонкими линиями). Искомая точка рыночного равновесия находится в доминирующей зоне множества

Парето, и именно в нее требуется произвести сдвиг из точки равновесия Нэша на основе переговорного процесса аукционного типа.

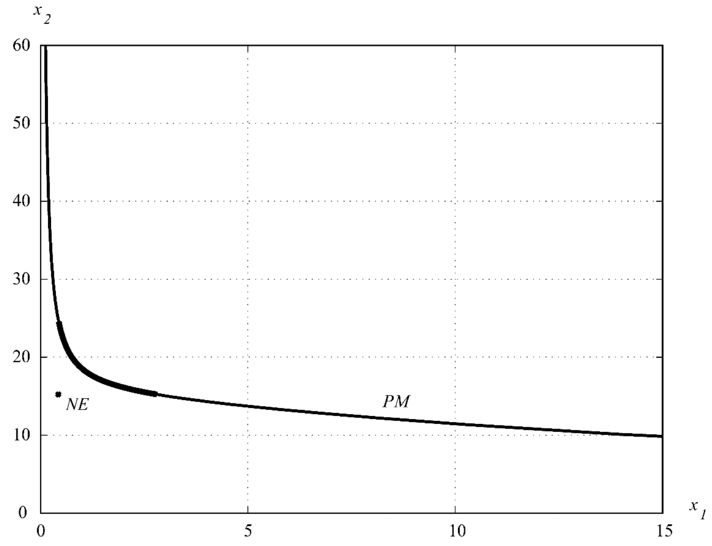

Рис. 1. Ситуация равновесия NE и множество точек максимума Парето PM

Проведены расчеты, представленные на рис. 2, для кривых *BR1* и *BR2* наилучших ответов игроков, на основе которых игроки вырабатывают свои ставки в аукционе. Эти кривые соединяют в точках пересечения равновесие Нэша и рыночное равновесие.

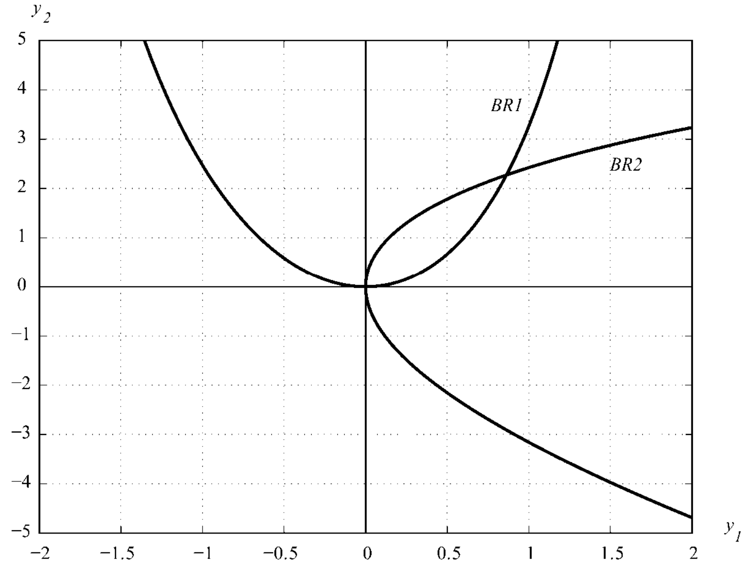

Рис. 2. Кривые BR1 и BR2 наилучших ответов игроков аукциона

Полученные результаты моделирования траектории переговорного процесса представлены на рис. 3. Здесь показаны ситуация равновесия по Нэшу *NE*, множество точек максимума по Парето *PM*, линии реакции конкурентов *BR1* и *BR2*, точка рыночного равновесия в их пересечении *ME*, начальная точка *IP* и траектория алгоритма *TA*, ведущая аукцион к рыночному равновесию *ME* из любой начальной точки *IP*. В частности, начальная точка *IP* может быть расположена в равновесии Нэша *NE*, и тогда траектория *TA* сдвигает равновесие Нэша *NE* в рыночное равновесие *ME* на основе аукциона.

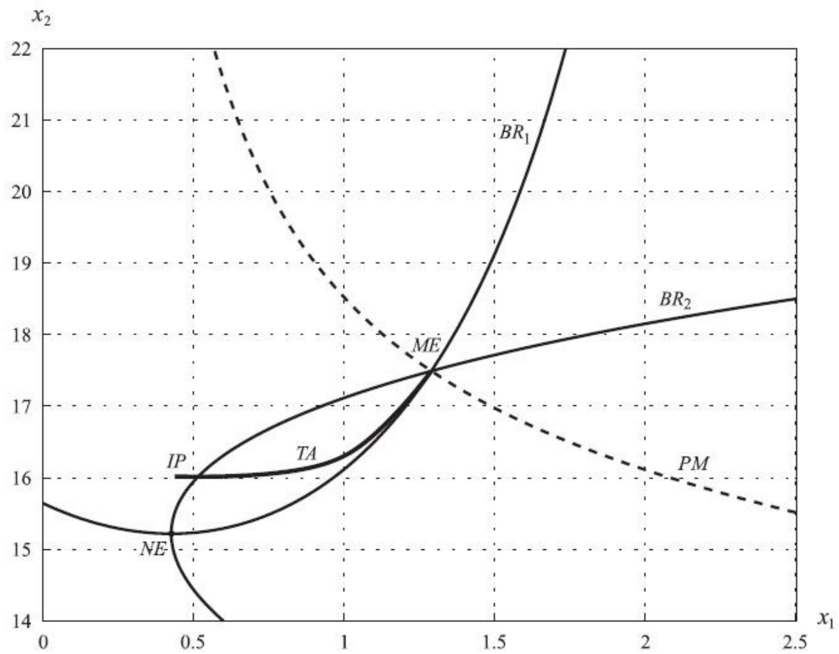

Рис. 3. Траектория TA поиска рыночного равновесия ME

Отметим в заключение, что разработанные алгоритмы и программы для аукционного процесса могут быть использованы для оценки оптимального экономического развития регионов при сохранении приемлемого уровня окружающей среды или для анализа договоренностей в переговорных процессах об объемах поставок на энергетических рынках (рынках нефти). В связи с этим они могут быть востребованы агентствами, занимающимися этой проблематикой.

Литература

1. Воробьев Н. Н., Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М. : Наука, 1985. – 271 с.
2. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М. : Айрис-Пресс, 2002. – 566 с.
3. Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. – Екатеринбург : Наука, 1993. – 184 с.
4. Красовский А. Н., Ладейщиков А. Н., Чой Е. С. Некоторые задачи оптимального управления при дефиците информации. – Екатеринбург : УрГАУ, 2014. – 112 с.
5. Красовский Н. А., Кряжимский А. В., Тарасьев А. М. Уравнения Гамильтона–Якоби в эволюционных играх // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 114–131.
6. Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Поиск точек максимума векторного критерия с декомпозиционными свойствами // Труды ИММ УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 167–182.
7. Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Декомпозиционный алгоритм поиска равновесия в динамической игре // Математическая теория игр и ее приложения. – 2011. – Т. 3, № 4. – С. 49–88.
8. Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Равновесные решения в динамических играх. – Екатеринбург : УрГАУ, 2015. – 128 с.
9. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О дифференциально-эволюционных играх // Труды Мат. ин-та РАН. – 1995. – Т. 211. – С. 257–287.
10. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. – М. : Наука, 1974. – 456 с.
11. Петросян Л. А., Захаров В. В. Математические модели в экологии. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского госуниверситета,1997. – 254 с.

12. Barrett S. International Environmental Agreements as Games // Conflicts and Cooperation in Managing Environmental Resources / ed. R. Pethig. – Berlin : Springer Verlag, 1990.

13. Chander P., Tulkens H. Theoretical Foundations of Negotiations and Cost Sharing in Transfrontier Pollution Problems // European Economic Review. – 1992. – Vol. 36. – P. 388–398.

14. Ellerman A. D., Decaux A. Analysis of Post-Kyoto CO_2 Emissions Trading Using Marginal Abatement Curves // Joint Program Report Series. – Cambridge : Massachusetts Institute of Technology. – 1998. – Report No. 40. – 32 p.

15. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control under Lack of Information. – Boston etc. : Birkhauser, 1995.

16. Krasovskii N. A., Tarasyev A. M. Decomposition Algorithm of Searching Equilibria in a Dynamic Game // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, No. 10. – P. 1865–1893.

17. Kryazhimskii A., Nentjes A., Shibayev S., Tarasyev A., Modeling Market Equilibrium for Transboundary Environmental Problem // Nonlinear Analysis. – 2001. – Vol. 47. – P. 991–1002.

18. Maeler K. G. The Acid Rain Game // Valuation Methods and Policy Making in Environmental Economics / eds. H. Folmer, E. van Ireland. – Amsterdam : Elsevier, 1989.

19. Nentjes A. Control of Reciprocal Transboundary Pollution and Joint Implementation // Economic Instruments for Air Pollution Control / eds. G. Klaassen, F. Foersund. – Kluwer, 1994. – P. 209–230.

20. Sanderson W., Tarasyev A., Usova A. Optimal Two Sector Growth Modelswith Three Factors // Review of Development Economics. – 2015. – Vol. 19, No. 1. – P. 85–99.

21. Tol R. The Benefits of Greenhouse Gas Emission Reduction: an Application of FUND // Working Paper FNU-64. – Hamburg : Hamburg University, 2005. – 33 p.

Krasovskii Nikolay Andreyevich,
Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor at Chair of Information Technologies
and Mathematical Modeling, Ural State Agrarian University (Ekaterinburg)

Tarasyev Alexander Mikhailovich,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor at Management and Marketing Chair,
Liberal Arts University – University for Humanities;
Head of the Dynamic Systems Department, N. N Krasovskii Institute
of Mathematics and Mechanics UrB RAS (Ekaterinburg)

Analysis of the Emission Reduction Problem within a Game Model of the Auction Type

The problem of emission reduction is considered within a game model of negotiation process. Negotiation process is presented as an auction in which an informational bureau (auctioneer) collects information among countries (auction participants) on their abilities to reduce emissions and forms price offers. Counties-participants maximize their own utility functions in response to proposed prices. The notion of the market equilibrium solution, which combines competitive and cooperative properties, is introduced within the framework of the auction model. An algorithm for searching the market equilibrium is proposed and illustrated by the game situation between European Union countries and Russia.

Key words: models of emission reduction; dynamical games; equilibrium situations; algorithms for searching equilibrium.