УДК 517.977

А. А. Успенский*, П. Д. Лебедев**

Вырожденность условий второго порядка при построении псевдовершин краевого множества для уравнения эйконала[1]

Исследуются условия возникновения негладких особенностей обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка. Рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения типа эйконала. Предметом изучения являются псевдовершины краевого множества, необходимые для аналитического и численного конструирования ветвей сингулярного множества – множества, на котором решение краевой задачи теряет гладкость. Выявлены условия, обеспечивающие корректность предельного перехода в определении псевдовершины. Изучаются необходимые условия существования псевдовершин для случая гладкой границы краевого невыпуклого множества. Показано, что необходимые условия второго порядка имеют вырожденный характер. Указаны области применения решений уравнений эйконала в задачах логистики. Построение решений позволяет минимизировать расходы на проектирование сетей складов, центров технического обслуживания или заправочных станций.

Ключевые слова: уравнение в частных производных первого порядка; минимаксное решение; быстродействие; волновой фронт; диффеоморфизм; эйконал; функция оптимального результата; сингулярное множество; симметрия; логистика.

Введение

Необходимость построения решений краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка продиктована потребностями механики, геометрической оптики, теории оптимального управления, дифференциальных игр, экономики и других отраслей знания. Гладкость краевых условий не гарантирует гладкости решения уравнения такого типа на области определения в полном пространстве переменных. Проблема построения нелокальной теории для таких уравнений снимается введением обобщенных решений. Известны различные подходы [1–5] к определению обобщенного решения уравнений. Концепция минимаксного решения [4], которая базируется на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр [6], введена А. И. Субботиным. Эффективность минимаксного подхода нашла подтверждение в разработке теоретических методов и аппроксимационных процедур построения обобщенных решений различных классов краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка и уравнений гамильтонова типа, изучаемых в задачах управления и дифференциальных играх. Одной из таких задач является задача оптимального управления по быстродействию.

В настоящей работе изучается проблема возникновения негладкости у функции оптимального результата в плоской задаче о быстродействии для случая круговой индикатрисы. Достаточно простая по своей геометрии структура векто-

* **Александр Александрович Успенский,** канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, заведующий сектором, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (ИММ УрО РАН); доцент кафедры финансов и бухгалтерского учета, АНО ВО «Гуманитарный университет» (г. Екатеринбург).

E-mail: uspen@imm.uran.ru

** **Павел Дмитриевич Лебедев,** канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).

[1] *Работа выполнена при поддержке комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-13, а также при поддержке РФФИ (грант 14-01-00486а).*

граммы скоростей делает эту задачу в некоторой степени модельной задачей. Сложность задаче придает допустимая по условию невыпуклость целевого множества. В этом случае даже при достаточно высокой гладкости границы цели у функции оптимального результата (минимаксного решения соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби) возникают множества, на которых эта функция терпит «градиентную катастрофу». Задача исследователя видится здесь, в частности, в том, чтобы научиться выявлять и строить сингулярные множества. Этой проблеме посвящен цикл работ [7–16], в которых предложены аналитические и численные алгоритмы построения сингулярных множеств и функции оптимального результата.

При изучении проблемы полезно помнить и использовать свойства решений задач, формально близких к задаче о быстродействии. Известно [11], что функция оптимального результата задачи о быстродействии отличается лишь знаком от эйконала – фундаментального, по С. Н. Кружкову [1], решения основного уравнения геометрической оптики [17]. Совпадение множеств Лебега функции оптимального результата и эйконала позволяет применять при построении решения задачи о быстродействии методы и конструкции геометрической оптики, дифференциальной геометрии [18].

Волновые фронты эйконала являются линиями уровня функции оптимального результата. Эволюция волновых фронтов, их перестройка, возникновение и классификация особенностей изучаются методами и средствами теории особенностей гладких отображений [19]. Конструкции этой теории также привлекаются при исследовании задач динамического управления [20]. В настоящей работе при изучении свойств множеств используются диффеоморфизмы, которые часто эксплуатируется в указанной теории.

Основными результатами исследования являются теорема о корректности предельного перехода при определении псевдовершины, порождающей ветвь сингулярного множества, и теорема о вырожденности необходимых условий второго порядка для псевдовершины. Псевдовершины являются особыми точками границы краевого множества. С одной стороны, они геометрически локализуют экстремум кривизны кривой, а с другой стороны, связаны с характеризацией множества с точки зрения меры невыпуклости [7; 8].

Важным практическим приложением решений уравнения эйконала является построение схем размещения объектов логистики или торговых центров [21]. При этом критерием оптимальности их размещения обычно служит минимизация расстояния от произвольной точки рассматриваемой области до ближайшего к нему объекта. Ключевую роль при построении сети объектов играет разбиение территории на их «зоны влияния» – участки, лежащие не дальше от одного из объектов, нежели от остальных. Граница между «зонами влияния» представляет собой сингулярное множество с точки зрения решения задачи для уравнения эйконала с краевым условием, заданным на границе объектов. Из каждой точки сингулярного множества выходят, как минимум, две оптимальные траектории, соединяющие ее с ближайшим центром. В зависимости от особенностей транспортной сети может меняться правая часть уравнения эйконала. В случае относительно равномерного развития территории ее можно считать постоянной. Если же имеет место наличие различных условий – природных (например, присутствие равнин и гор) или техногенных (например, наличие асфальтовых и грунтовых дорог), то значение правой части принимается кусочно-постоянным на разных участках. В другой постановке могут быть изначально заданы характеристики логистической сети, и требуется определить минимально необходимое число ее элементов. Тогда могут применяться итерационные алгоритмы, которые строят множества симметрии (сингулярные множества) для различного числа объектов, и на их основе устанавливают максимум расстояния для наиболее удаленной точки. Затем, в случае если расстояние слишком большое, число центров увеличивается, в противном случае оно уменьшается с целью отыскания более экономичной сети [22].

1. Объект исследования

Рассматривается краевая задача Дирихле:

$$\min_{v:\|v\|\le 1}\left(v_1\frac{\partial u}{\partial x}+v_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+1=0, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\Gamma}=0. \tag{1.2}$$

Здесь $\|v\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}v_i^2}$ – норма вектора $v=(v_1,v_2)$. Краевое условие (1.2) определено на границе $\Gamma=\partial M$ замкнутого множества $M\subset\mathbf{R}^2$. Предполагается, что Γ не имеет точек самопересечения. Дифференциальные свойства границы Γ будут оговорены ниже при обосновании утверждений.

Структура минимаксного решения $u=u(x,y)$ задачи (1.1)–(1.2) известна ([11]):

$$u(x,y)=\rho\left(x,y,M\right).$$

Здесь $\rho(\mathbf{x},M)=\min_{A\in M}\|\mathbf{x}-A\|$ – евклидово расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества M.

Минимаксное решение $u=u(x,y)$ задачи (1.1)–(1.2) является функцией оптимального результата в соответствующей задаче быстродействия ([2]):

$$\begin{cases}\dot{x}=v_1\\ \dot{y}=v_2\end{cases}, \tag{1.3}$$

где управление $v=(v_1,v_2)$ стеснено ограничением $\|v\|\le 1$. Задача быстродействия заключается в приведении движения динамической системы (1.3) на множество M за наименьшее время за счет надлежащего выбора допустимого управления $v=(v_1,v_2)$.

С. Н. Кружков ввел [1] главное (фундаментальное) решение $u_K=u_K(x,y)$ краевой задачи Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала. В частном случае для изотропной среды фундаментальное решение краевой задачи

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1, \tag{1.4}$$

$$u\big|_{\Gamma}=0 \tag{1.5}$$

имеет вид $u_K(x,y)=-\rho\left(x,y,M\right)$. Здесь краевое условие то же, что и в задаче (1.1)–(1.2). Нетрудно видеть, что карта линий уровня фундаментального решения задачи (1.4)–(1.5), т. е. совокупность волновых фронтов, и карта линий уровня минимаксного решения задачи (1.1)–(1.2) совпадают. Стало быть, нахождение решения задачи (1.1)–(1.2) равносильно построению решения задачи (1.4)–(1.5). Характер эволюции волновых фронтов определяется геометрией краевого множества и дифференциальными свойствами его границы. При этом характер выпуклости краевого множества играет весьма существенную роль. Невыпуклость этого множества влечет наличие у решения задачи сингулярного множества, которое в данном случае относится к множествам симметрии [13]. В превалирующем случае сингулярное множество является объединением нуль- и одномерных многообразий, и это множество разбивает область рассмотрения решения задачи (1.1)–(1.2) на подобласти, в которых решение дифференцируемо в классическом смысле. Отыскание сингулярного множества в аналитическом виде или же нахождение с помощью вычислительных процедур его аппроксимации заметным образом облегчает построение решение краевой задачи в целом. Особую роль при этом играют псевдовершины – точки на границе краевого множества, «сигнализирующие» о наличии одномерных многообразий, ветвей множества симметрии. Ранее установлена связь посредством аналитических формул между псевдовершинами краевого множества и крайними точками одномерных многообразий («началами» ветвей сингулярного множества) в ряде случаев. При этом означенная связь выявлена в том числе и для ослабленных в части гладкости условий, налагаемых на границу краевого множества. В частности, получены формулы для крайних точек сингулярных кривых для случая, когда граница цели имеет разрыв по второй производной, и для случая кусочно-гладкой границы [16].

Ниже приводятся условия, обеспечивающие корректность определения псевдовершины, а также изучаются необходимые условия существования псевдовершин для случая достаточно гладкой параметризованной границы краевого множества в условиях, допускающих невыпуклость множества.

2. Определения, основные понятия

Пусть $\gamma : T \to R^2$ – отображение числового интервала $T = \left(\widehat{t}, \breve{t}\right)$, $-\infty \le \widehat{t} < \breve{t} \le +\infty$ на плоскость. Вектор-функция $\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\right)$ является гладкой в том смысле, что ее производные $\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\right)$ существуют по крайней мере до второго порядка включительно. Образ $\Gamma = \gamma(T)$ этого отображения представляет собою плоскую кривую. Полагаем, что Γ является регулярной, т. е. вектор скорости $\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\right)$ не обращается в нуль-вектор. Это означает, что точка $\gamma = \gamma(t)$ движется вдоль кривой Γ и при этом никогда не останавливается и не поворачивает обратно. Предположим, что кривая Γ не имеет точек самопересечения, т.е. не существует двух моментов $t_*, t_{**}, t_* \ne t_{**}$, что $\gamma(t_*) = \gamma(t_{**})$. Включим также в рассмотрение кривые, заданные на конечных интервалах $T = \left(\widehat{t}, \breve{t}\right)$, $-\infty < a < b < +\infty$, допускающие доопределение в концевых точках $t = \widehat{t}$ и $t = \breve{t}$. Кривые вида $\Gamma = \gamma(T)$, когда $T = \left[\widehat{t}, \breve{t}\right]$, $\gamma(\widehat{t}) = \gamma(\breve{t})$, назовем контурами.

Приводимые ниже в этом параграфе определения являются переложением ранее введенных определений [9–12] со случая скалярной функции одного переменного на случай параметрически заданного отображения.

Рассмотрим локальные (определенные на малых интервалах) решения уравнение вида

$$G(t_1, t_2) = 0.$$

Здесь $G = G(t_1, t_2)$ – функция двух переменных $(t_1, t_2) \in R^2$. Локальные решения этого уравнения будем искать на прямоугольных открытых областях

$\Pi_+(t_0) = \{(t_1,t_2) \in R^2 : t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)\}$. Здесь t_0 фиксировано, параметры $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Нас интересуют решения этого уравнения с заранее предписанными свойствами, а именно диффеоморфизмы [20]. Здесь диффеоморфизм – скалярная непрерывно дифференцируемая строго монотонная без нулей производной функция. В отличие от распространенного определения диффеоморфизма, согласно которому от функции требуется существование производных высших порядков, в настоящем исследовании ограничимся существованием производной только первого порядка. Говоря о локальном диффеоморфизме, мы подразумеваем, что он определен в малом – в окрестности или же в полуокрестности точки рассмотрения.

Определение 1. *Предположим, что локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, определенный уравнением $G(t_1,t_2) = 0$, непрерывен слева в точке $t_1 = t_0$ и отображает левую полуокрестность точки $t_1 = t_0$ в ее правую полуокрестность, если выполняются условия:*

(A1) $t_2\big((t_0 - \delta_1, t_0)\big) = (t_0, t_0 + \delta_2), \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$,

(A2) $\lim\limits_{t_1 \to t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0$.

Нетрудно видеть, что односторонняя непрерывность слева диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ обеспечивается требованием строгой отрицательности его производной. Введенный в рассмотрение диффеоморфизм можно рассматривать как локальную перепараметризацию кривой, которая (перепараметризация) задается в окрестности точки неявно с помощью евклидова расстояния. Диффеоморфизмы естественным образом входят в арсенал дифференциальной геометрии и теории особенностей гладких отображений [19 ; 20].

Отметим особенности предложенной математической модели. Введенный диффеоморфизм носит локальный характер, причем определяется с одной стороны (слева) от точки $t_1 = t_0$. При этом конструкции присуща симметрия в следующем смысле. Обратный локальный диффеоморфизм $t_1 = t_1(t_2)$ при соблюдении условия **(A2)** Определения 1 существует, определен с другой стороны (справа) от той же точки $t_2 = t_0$ и наследует аналог этого условия в том смысле, что $\lim\limits_{t_2 \to t_0 + 0} t_1(t_2) = t_0$. Таким образом в рамках этой конструкции точка $t = t_0$ «выколота» и рассматривается как предельный элемент. Это важное свойство математической модели, которое позволяет исследовать кривые с различными дифференциальными свойствами, не исключая негладкие кривые [9 ; 14]. На локальный диффеоморфизм можно смотреть также как на правило, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между парами точек, лежащими в окрестности точки рассмотрения по разные от нее стороны. Кроме того, здесь можно говорить о двойственной кривой $\tilde{\Gamma}$, определенной в плоскости переменных t_1, t_2 непрерывной склейкой графиков исходного диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ и обратного ему диффеоморфизма $t_1 = t_1(t_2)$. При этом дифференциальные свойства кривой $\tilde{\Gamma}$ в точке $(t_1,t_2) = (t_0,t_0)$ определяются дифференциальными свойствами исходной кривой Γ [12].

Выберем произвольно и зафиксируем два момента $t_1 \in T$ и $t_2 \in T$, $t_1 < t_2$. Проведем через точки $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ касательные прямые. Пусть

$\rho(B,M)=\min\limits_{A\in M}\|B-A\|$ – евклидово расстояние от точки $B\in R^2$ до множества $M\subset R^2$.

Определение 2. *Псевдовершиной кривой* Γ *обозначим точку*

$$(x_0,y_0)\triangleq\lim_{t_1\to t_0-0}(x_*,y_*),$$

где $(x_*,y_*)=(x_*(t_1),y_*(t_1))$ – *однопараметрическое подмножество решений* $(x_*,y_*)=(x_*(t_1,t_2)),y_*(t_1,t_2))$ *системы уравнений*

$$\begin{cases}(x-\gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1)=(y-\gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1)\\(x-\gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2)=(y-\gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2)\end{cases}, \tag{2.1}$$

определяемое непрерывным слева в точке $t_1=t_0$ *локальным диффеоморфизмом* $t_2=t_2(t_1)$ *левой полуокрестности точки* $t_1=t_0$ *на ее правую полуокрестность, который задается уравнением*

$$G(t_1,t_2)=0. \tag{2.2}$$

Здесь

1) (x_*,y_*) *– точка пересечения касательных к кривой* Γ *в точках* $\gamma(t_1)$ *и* $\gamma(t_2)$,

2) $G(t_1,t_2)=\rho^2\left(\gamma(t_1),(x_*,y_*)\right)-\rho^2\left(\gamma(t_2),(x_*,y_*)\right)$ *– разность квадратов расстояний между указанными точками* $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ *кривой* Γ *и точкой* (x_*,y_*) *пересечения касательных, проведенных через* $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$.

Определение 3. *Ветвью* $L(x_0,y_0)$ *биссектрисы кривой* Γ, *где* (x_0,y_0) *– псевдовершина* Γ, *охарактеризуем множество точек* (x,y) *на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений*

$$\begin{cases}(x-\gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1)+(y-\gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1)=0\\(x-\gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2)+(y-\gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2)=0\end{cases}. \tag{2.3}$$

Здесь $t_2=t_2(t_1)$ *– непрерывный слева в точке* $t_1=t_0$ *локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки* $t_1=t_0$ *на ее правую полуокрестность, который задается уравнением (2.2).*

3. О корректности предельного перехода в определении псевдовершины

Пусть $a(t)=(a_1(t),a_2(t))$, $b(t)=(b_1(t),b_2(t))$ и $e(t)=(e_1(t),e_2(t))$ – дифференцируемые вектор-функции скалярного аргумента $t\in T=\left(\hat{t},\check{t}\right)$. Введем обозначения:

$\left\langle a(t),b(t)\right\rangle=a_1(t)b_1(t)+a_2(t)b_2(t)$ – скалярное произведение векторов $a(t)$ и $b(t)$, $\det(a(t_1),b(t_2))=a_1(t_1)b_2(t_2)-a_2(t_1)b_1(t_2)$ – определитель матрицы $\begin{pmatrix}a_1(t_1) & a_2(t_1)\\ b_1(t_2) & b_2(t_2)\end{pmatrix}$, построенный на векторах $a(t_1)$ и $b(t_2)$, $t_1\in T$, $t_2\in T$.

Получаем формулы свертки определителей (вычисления в одной точке):

$$b_1 \det(a,e) - e_1 \det(a,b) = a_1 \det(b,e),$$
$$b_2 \det(a,e) - e_2 \det(a,b) = a_2 \det(b,e). \quad (3.1)$$

Правило вычисления производной определителя гласит:

$$\left(\det(a(t),b(t))\right)' = \det(a'(t),b(t)) + \det(a(t),b'(t)). \quad (3.2)$$

Если аргументы векторов $a(t_1)$ и $b(t_2)$ стеснены дифференциальной связью $t_2 = t_2(t_1)$, то, используя правило дифференцирования композиций, нетрудно получить формулы для производных по переменной t_1 для определителей:

$$\left(\det(a(t_1),b(t_2))\right)' = \det(a'(t_1),b(t_2)) + \frac{dt_2}{dt_1} \cdot \det(a(t_1),b'(t_2)),$$
$$\left(\det(a(t_2),b(t_2))\right)' = \frac{dt_2}{dt_1}\left(\det(a'(t_2),b(t_2)) + \det(a(t_2),b'(t_2))\right). \quad (3.3)$$

Компоненты решения (x_*, y_*) системы (2.1) допускают компактную форму записи:

$$x_* = \frac{-\gamma_1'(t_2) \cdot \det(\gamma(t_1),\gamma'(t_1)) + \gamma_1'(t_1) \cdot \det(\gamma(t_2),\gamma'(t_2))}{\det(\gamma'(t_1),\gamma'(t_2))},$$
$$y_* = \frac{-\gamma_2'(t_2) \cdot \det(\gamma(t_1),\gamma'(t_1)) + \gamma_2'(t_1) \cdot \det(\gamma(t_2),\gamma'(t_2))}{\det(\gamma'(t_1),\gamma'(t_2))}. \quad (3.4)$$

Введем обобщение классической производной. Пусть $f(t)$ – функция скалярного аргумента $t \in R$, заданная в окрестности точки $t = t_0$, при этом слева от этой точки определен локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, удовлетворяющий условиям **(A1), (A2)** и дополнительно условию

(A3) $\lim\limits_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = c,\ c = const, c \le 0.$

Здесь подчеркнем, что в приводимом ниже обобщении производной локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, удовлетворяющий условиям **(A1)–(A3)**, может быть локальным решением некоторого уравнения, связывающего две переменнные t_1, t_2 (например, решением уравнения (2.2)), а может быть назначен безотносительно к уравнению.

Определение 4. *Псевдопроизводной $Df(t_0)$ назовем односторонний левый частичный предел дифференциальных отношений $\frac{f(t_2(t_1)) - f(t_1)}{t_2(t_1) - t_1}$, построенных на трех точках $t = t_1, t = t_0, t = t_2, t_1 < t_0 < t_2$, связанных между собой в силу локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$, удовлетворяющего набору условий **(A1)–(A3)**:*

$$Df(t_0) \triangleq \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{f(t_2(t_1)) - f(t_1)}{t_2(t_1) - t_1}.$$

Термин «псевдопроизводная» выбран для краткости. Правильнее по существу, но длиннее как оборот речи было бы использовать термин «производная в силу диффеоморфизма» [23].

В дальнейшем кривую $\Gamma=\gamma(T)$ ограничим двумя условиями:

(B1) $\gamma'(t)\neq(0,0),\, t\in T$,

(B2) $\det(\gamma'(t),\gamma''(t))\neq 0,\, t\in T$.

Условие **(B1)** – это условие регулярности кривой Γ, постулирующее невырожденность касательного вектора. Условие **(B2)** формально означает отличие от нуля кривизны кривой Γ в соответствующей точке. Напомним, что кривизна кривой Γ в точке $\gamma(t)$ определяется формулой $\kappa(\gamma(t))=\dfrac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t))}{\left\|\gamma'(t)\right\|^3}$ [18].

Ненулевая кривизна свидетельствует о локальной выпуклости кривой, что гарантирует существование решений системы (2.1) в Определении 2 псевдовершины. Кроме того, важно отметить, что пара условий **(B1)**, **(B2)** обеспечивает для каждой координатной функции отличие от нуля хотя бы одной из производных первого и второго порядков. Это означает, что координатные функции не являются плоскими и, стало быть, могут локально аппроксимированы струями – отрезками рядов Тейлора [20].

Обоснуем еще одно важное свойство модели, которое обеспечивается условием **(B2)**.

Теорема 1. *Если кривая $\Gamma=\gamma(T)$ в точке $t=t_0$ удовлетворяет условиям **(B1)–(B2)**, а локальный диффеоморфизм $t_2=t_2(t_1)$ удовлетворяет условиям **(A1)–(A3)**, то существует и конечен предел $\lim\limits_{t_1\to t_0-0}(x_*,y_*)$, где $(x_*,y_*)=(x_*(t_1),y_*(t_1))$ – однопараметрическое подмножество решений $(x_*,y_*)=(x_*(t_1,t_2(t_1))),y_*(t_1,t_2(t_1)))$ системы уравнений (2.1). При этом $\lim\limits_{t_1\to t_0-0}(x_*,y_*)=\gamma(t_0)$.*

Доказательство. Координаты точки (x_*,y_*) пересечения касательных к кривой Γ в точках $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ являются отношениями бесконечно малых при $t_1\to t_0-0$ (см. (3.4)). Рассмотрим вопрос о существовании предела этих отношений. Для этого перейдем к пределу отношения их производных. Предел общего для обеих координат знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\Big(\det(\gamma'(t_1),\gamma'(t_2))\Big)'=\lim_{t_1\to t_0-0}\left(\det(\gamma''(t_1),\gamma'(t_2))+\det(\gamma'(t_1),\gamma''(t_2))\frac{dt_2}{dt_1}\right)=$$

$$=\det(\gamma''(t_0),\gamma'(t_0))+c\det(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0))=(c-1)\det(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0))\neq 0$$

Найдем производную числителя координаты x_*:

$$\Big(-\gamma_1'(t_2)\cdot\det(\gamma(t_1),\gamma'(t_1))+\gamma_1'(t_1)\cdot\det(\gamma(t_2),\gamma'(t_2))\Big)'=$$

$$=-\gamma_1''(t_2)\cdot\det(\gamma(t_1),\gamma'(t_1))\frac{dt_2}{dt_1}-\gamma_1'(t_2)\cdot\Big(\det(\gamma'(t_1),\gamma'(t_1))+\det(\gamma(t_1),\gamma''(t_1))\Big)+$$

$$+\gamma_1''(t_1)\cdot\det(\gamma(t_2),\gamma'(t_2))+\gamma_1'(t_1)\cdot\frac{dt_2}{dt_1}\Big(\det(\gamma'(t_2),\gamma'(t_2))+\det(\gamma(t_2),\gamma''(t_2))\Big)=$$

$$=-\gamma_1^{//}(t_2)\cdot\det(\gamma(t_1),\gamma^{/}(t_1))\frac{dt_2}{dt_1}-\gamma_1^{/}(t_2)\cdot\det(\gamma(t_1),\gamma^{//}(t_1))+$$

$$+\gamma_1^{//}(t_1)\cdot\det(\gamma(t_2),\gamma^{/}(t_2))+\gamma_1^{/}(t_1)\cdot\frac{dt_2}{dt_1}\det(\gamma(t_2),\gamma^{//}(t_2)).$$

Переходя к пределу в числителе, получим константу

$$\left(1-c\right)\cdot\left(\gamma_1^{//}(t_0)\det(\gamma(t_0),\gamma^{/}(t_0))-\gamma_1^{/}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{//}(t_0))\right).$$

Стало быть, предел $\lim\limits_{t_1\to t_0-0}x_*(t_1,t_2(t_1))$ существует. При этом, сократив предельное соотношение на $\left(c-1\right)\neq 0$, получим:

$$\lim_{t_1\to t_0-0}x_*(t_1,t_2(t_1))=\frac{\gamma_1^{/}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{//}(t_0))-\gamma_1^{//}(t_0)\det(\gamma(t_0),\gamma^{/}(t_0))}{\det(\gamma^{/}(t_0),\gamma^{//}(t_0))}.$$

В числителе воспользуемся формулой свертки определителей (3.1), а затем условием **(B2)**:

$$\lim_{t_1\to t_0-0}x_*(t_1,t_2(t_1))=\frac{\gamma_1(t_0)\cdot\det(\gamma^{/}(t_0),\gamma^{//}(t_0))}{\det(\gamma^{/}(t_0),\gamma^{//}(t_0))}=\gamma_1(t_0).$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{t_1\to t_0-0}y_*(t_1,t_2(t_1))=\gamma_2(t_0).$$

Таким образом, означенный предел $\lim\limits_{t_1\to t_0-0}(x_*,y_*)$ существует, конечен, не зависит от предельной величины $c\neq 1$, характеризующей локальный диффеоморфизм, и лежит на кривой

$$(x_0,y_0)\triangleq\lim_{t_1\to t_0-0}(x_*,y_*)=\left(\gamma_1(t_0),\gamma_2(t_0)\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 1 выражает наличие в математической модели двойственности, выраженной на языке предельных элементов. Дуга гладкой кривой, стянутая в точку, отображается с помощью линейного преобразования и локального диффеоморфизма в дугу другой (двойственной) кривой. При этом дуга двойственной кривой стягивается в ту же начальную точку. Все это, конечно, имеет место при соблюдении условий теоремы.

Вместе с этим считаем обоснованной корректность предельного перехода в определении псевдовершины при наличии дополнительного условия **(A3)**. Под корректностью здесь понимаем выполнение двух условий: во-первых, что предел $(x_0,y_0)\triangleq\lim\limits_{t_1\to t_0-0}(x_*,y_*)$ существует и конечен, во-вторых, что он принадлежит кривой. Отметим, что наличие для локальных диффеоморфизмов дополнительного условия **(A3)** ранее обоснована для кривых с различными дифференциальными свойствами. При этом найдены предельные значения c [12; 14].

4. Вырожденность необходимых условий 2-го порядка

Сформулируем и докажем основной результат исследования.

Теорема 2. *Если $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$ – псевдовершина дважды дифференцируемой плоской кривой $\Gamma=\gamma(T)$ и в точке $t=t_0$ выполняются условия* ***(B1)–(B2)****, то псевдовершина удовлетворяет уравнению*

$$\det(\gamma',\gamma'')\cdot\langle\gamma,D\gamma\rangle+\det(\gamma,\gamma')\cdot\langle\gamma',\gamma''\rangle-\det(\gamma,\gamma'')\|\gamma'\|^2=0. \qquad (3.5)$$

При этом (3.5) является вырожденным уравнением.

Доказательство. По условию

$$(x_0,y_0)=\lim_{t_1\to t_0-0}(x_*,y_*),$$

где $(x_*,y_*)=(x_*(t_1),y_*(t_1))$ – однопараметрическое подмножество решений системы (2.1), определяемое гладкой строго монотонной без нулей производной функцией $t_2=t_2(t_1)$, являющейся локальным решением уравнения (2.2).

Доказательство теоремы существенным образом опирается на полученный ранее результат, выражающий свойства локального диффеоморфизма $t_2=t_2(t_1)$ в зависимости от дифференциальных свойств рассматриваемых кривых. В случае, когда кривая имеет порядок гладкости не ниже второго, предельное значение производной локального диффеоморфизма конечно и имеет вид [12]:

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{dt_2}{dt_1}(t_1)=-1.$$

Далее изучим проблему существования построенного на трех точках предела $\lim\limits_{t_1\to t_0-0}\dfrac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{t_2-t_1}$. В рассматриваемом случае аргументы стеснены дифференциальной связью $t_2=t_2(t_1)$. Таким образом, здесь речь идет о существовании псевдопроизводной

$$D\gamma_2(t_0)\triangleq\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{\gamma_2(t_2(t_1))-\gamma_2(t_1)}{t_2(t_1)-t_1}.$$

Поскольку

$$\frac{\gamma_2(t_2(t_1))-\gamma_2(t_1)}{t_2(t_1)-t_1}=\frac{t_2(t_1)-t_0}{t_2(t_1)-t_1}\cdot\frac{\gamma_2(t_2(t_1))-\gamma_2(t_0)}{t_2(t_1)-t_0}+\frac{t_0-t_1}{t_2(t_1)-t_1}\cdot\frac{\gamma_2(t_0)-\gamma_2(t_1)}{t_0-t_1},$$

и

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{t_2(t_1)-t_0}{t_2(t_1)-t_1}=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{\left(t_2(t_1)-t_0\right)'}{\left(t_2(t_1)-t_1\right)'}=\frac{-1}{-1-1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{t_0-t_1}{t_2(t_1)-t_1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{\gamma_2(t_2(t_1))-\gamma_2(t_0)}{t_2(t_1)-t_0}=\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{\gamma_2(t_0)-\gamma_2(t_1)}{t_0-t_1}=\gamma_2'(t_0),$$

то означенный предел существует, составляя равновесную выпуклую комбинацию из значений классической производной:

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{\gamma_2(t_2(t_1))-\gamma_2(t_1)}{t_2(t_1)-t_1}=\frac{1}{2}\gamma_2'(t_0)+\frac{1}{2}\gamma_2'(t_0)=\gamma_2'(t_0).$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{\gamma_1(t_2(t_1)) - \gamma_1(t_1)}{t_2(t_1) - t_1} = \frac{1}{2}\gamma_1^/(t_0) + \frac{1}{2}\gamma_1^/(t_0) = \gamma_1^/(t_0).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае псевдопроизводные координатных функций совпадают с классическими производными

$$D\gamma_1(t_0) = \gamma_1^/(t_0),\, D\gamma_2(t_0) = \gamma_2^/(t_0).$$

Напомним, что точки (x_*, y_*) удовлетворяют равенству (2.2), которое в нашем случае преобразуется в равенство:

$$\left(x_* - \gamma_1(t_1)\right)^2 + \left(y_* - \gamma_2(t_1)\right)^2 = \left(x_* - \gamma_1(t_2)\right)^2 + \left(y_* - \gamma_2(t_2)\right)^2 . \tag{4.2}$$

Переменные t_1 и t_2 стеснены неравенством $t_1 < t_2$. Из равенства (4.2) следует, что

$$2x_*\left(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)\right) + 2y_*\left(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)\right) =$$

$$= \left(\gamma_2(t_2)\right)^2 - \left(\gamma_2(t_1)\right)^2 + \left(\gamma_1(t_2)\right)^2 - \left(\gamma_1(t_1)\right)^2. \tag{4.3}$$

По условию кривая регулярная, $\gamma^/(t_0) \neq (0,0)$. Полагая для определенности $\gamma_1^/(t_0) \neq 0$, перейдем от (4.3) к одному из возможных эквивалентных представлений

$$\frac{\dfrac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{t_2 - t_1}}{\dfrac{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}{t_2 - t_1}} = -\frac{\gamma_1(t_2) + \gamma_1(t_1) - 2x_*}{\gamma_2(t_2) + \gamma_2(t_1) - 2y_*}. \tag{4.4}$$

Предел левой части равенства (4.4) существует и равен $\dfrac{D\gamma_2(t_0)}{D\gamma_1(t_0)}$. Стало быть, существует предел правой части. Таким образом, имеет место равенство пределов

$$\frac{D\gamma_2(t_0)}{D\gamma_1(t_0)} = \lim_{t_1 \to t_0 - 0}\left(-\frac{\gamma_1(t_2) + \gamma_1(t_1) - 2x_*}{\gamma_2(t_2) + \gamma_2(t_1) - 2y_*} \right). \tag{4.5}$$

Для вычисления предела в правой части (4.5) преобразуем стоящую там дробь, опираясь на (3.4):

$$\frac{\gamma_1(t_2) + \gamma_1(t_1) - 2x_*}{\gamma_2(t_2) + \gamma_2(t_1) - 2y_*} =$$

$$= \frac{\left(\gamma_1(t_2) + \gamma_1(t_1)\right) \cdot \det(\gamma^/(t_1), \gamma^/(t_2)) + 2\gamma_1^/(t_2) \cdot \det(\gamma(t_1), \gamma^/(t_1)) - 2\gamma_1^/(t_1) \cdot \det(\gamma(t_2), \gamma^/(t_2))}{\left(\gamma_2(t_2) + \gamma_2(t_1)\right) \cdot \det(\gamma^/(t_1), \gamma^/(t_2)) - 2\gamma_2^/(t_1) \cdot \det(\gamma(t_2), \gamma^/(t_2)) + 2\gamma_2^/(t_2) \cdot \det(\gamma(t_1), \gamma^/(t_1))}$$

.

Получаем отношение бесконечно малых при $t_1 \to t_0 - 0$. Здесь учтено, что аргументы связаны в силу диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$. Попытаемся вычислить предел в (4.9), ограничиваясь только линейными аппроксимациями числителя и знаменателя. Для этого, привлекая формулы (3.1)–(3.3) для определителей, найдем производные всех слагаемых числителя и знаменателя:

$$\left(\gamma_1(t_2)+\gamma_1(t_1)-2x_*\right)' = \left(\gamma_1'(t_2)\cdot\frac{dt_2}{dt_1}+\gamma_1'(t_1)\right)\cdot\det(\gamma'(t_1),\gamma'(t_2))+$$

$$\left(\gamma_1(t_2)+\gamma_1(t_1)\right)\cdot\left(\det(\gamma''(t_1),\gamma'(t_2))+\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\det(\gamma'(t_1),\gamma''(t_2))\right)+$$

$$+2\gamma_1''(t_2)\cdot\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\det(\gamma(t_1),\gamma'(t_1))+2\gamma_1'(t_2)\cdot\left(\det(\gamma'(t_1),\gamma'(t_1))+\det(\gamma(t_1),\gamma''(t_1))\right)$$

$$-2\gamma_1''(t_1)\cdot\det(\gamma(t_2),\gamma'(t_2))-2\gamma_1'(t_1)\cdot\frac{dt_2}{dt_1}\left(\det(\gamma'(t_2),\gamma'(t_2))+\det(\gamma(t_2),\gamma''(t_2))\right),$$

$$\left(\gamma_2(t_2)+\gamma_2(t_1)-2y_*\right)' = \left(\gamma_2'(t_2)\cdot\frac{dt_2}{dt_1}+\gamma_2'(t_1)\right)\cdot\det(\gamma'(t_1),\gamma'(t_2))+$$

$$\left(\gamma_2(t_2)+\gamma_2(t_1)\right)\cdot\left(\det(\gamma''(t_1),\gamma'(t_2))+\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\det(\gamma'(t_1),\gamma''(t_2))\right)+$$

$$-2\gamma_2''(t_1)\cdot\det(\gamma(t_2),\gamma'(t_2))-2\gamma_2'(t_1)\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\left(\det(\gamma'(t_2),\gamma'(t_2))+\det(\gamma(t_2),\gamma''(t_2))\right)+$$

$$2\gamma_2''(t_2)\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\det(\gamma(t_1),\gamma'(t_1))+2\gamma_2'(t_2)\cdot\frac{dt_2}{dt_1}\left(\det(\gamma'(t_1),\gamma'(t_1))+\det(\gamma(t_1),\gamma''(t_1))\right)$$

Заметим, что

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\left(\gamma_1'(t_2)\cdot\frac{dt_2}{dt_1}+\gamma_1'(t_1)\right)=\gamma_1'(t_0)\cdot\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{dt_2}{dt_1}+\gamma_1'(t_0)=-\gamma_1'(t_0)+\gamma_1'(t_0)=0,$$

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\left(\gamma_2'(t_2)\cdot\frac{dt_2}{dt_1}+\gamma_2'(t_1)\right)=0,$$

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\left(\det(\gamma''(t_1),\gamma'(t_2))+\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\det(\gamma'(t_1),\gamma''(t_2))\right)=$$

$$=\det(\gamma''(t_0),\gamma'(t_0))+\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\det(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0))=$$

$$=\det(\gamma''(t_0),\gamma'(t_0))-\det(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0))=$$

$$=-\det(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0))-\det(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0))=$$

$$=-2\det(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0)),$$

$$\det(\gamma'(t_i),\gamma'(t_i))=0, i=1,2.$$

Тогда предел числителя дроби, стоящей в (4.5), равен

$$-\gamma_1(t_0)\cdot\det(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0))-\gamma_1''(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma'(t_0))+\gamma_1'(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma''(t_0)),$$

а предел ее знаменателя имеет вид

$$\gamma_2(t_0)\cdot\det(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0))+\gamma_2''(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma'(t_0))-\gamma_2'(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma''(t_0)).$$

Оказывается, что обе эти величины равны нулю. Действительно, воспользовавшись для первой суммы формулой свертки определителей (3.1), сгруппировав второй и третий члены, получим

$$-\gamma_1(t_0)\cdot\det(\gamma^{/}(t_0),\gamma^{//}(t_0))-\gamma_1^{//}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{/}(t_0))+\gamma_1^{/}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{//}(t_0))=$$

$$=-\gamma_1(t_0)\cdot\det(\gamma^{/}(t_0),\gamma^{//}(t_0))+\gamma_1(t_0)\cdot\det(\gamma^{/}(t_0),\gamma^{//}(t_0))=0\,. \qquad (4.6)$$

Второе равенство

$$\begin{aligned}&\gamma_2(t_0)\cdot\det(\gamma^{/}(t_0),\gamma^{//}(t_0))+\\&\gamma_2^{//}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{/}(t_0))-\gamma_2^{/}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{//}(t_0))=0\end{aligned} \qquad (4.7)$$

доказывается аналогично. Равенство нулю пределов числителя и знаменателя означает, что для вычисления предела в (4.5) линейных членов разложения числителя и знаменателя по формуле Тейлора недостаточно. Необходимо привлекать производные порядка выше второго, что лежит за рамками условий леммы. Таким образом, хотя предел в правой части равенства (4.5) существует, производных первого и второго порядков недостаточно для его вычисления. Между тем, с учетом (4.5)–(4.7), формально справедливо равенство

$$\left(-\gamma_1(t_0)\cdot\det(\gamma^{/}(t_0),\gamma^{//}(t_0))-\gamma_1^{//}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{/}(t_0))+\gamma_1^{/}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{//}(t_0))\right)\times$$
$$\times D\gamma_1(t_0)+$$
$$+\left(\gamma_2(t_0)\cdot\det(\gamma^{/}(t_0),\gamma^{//}(t_0))+\gamma_2^{//}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{/}(t_0))-\gamma_2^{/}(t_0)\cdot\det(\gamma(t_0),\gamma^{//}(t_0))\right)\times$$
$$\times D\gamma_2(t_0)=0\,.$$

Опустив для краткости значение аргумента, запишем равенство в виде

$$\begin{aligned}&\det(\gamma^{/},\gamma^{//})\cdot\left(\gamma_1 D(\gamma_1)+\gamma_2 D(\gamma_2)\right)+\\&\det(\gamma,\gamma^{/})\cdot\left(\gamma_1^{/}\gamma_1^{//}+\gamma_2^{/}\gamma_2^{//}\right)-\det(\gamma,\gamma^{//})\cdot\left(\left(\gamma_1^{/}\right)^2+\left(\gamma_2^{/}\right)^2\right)=0\end{aligned}$$

откуда в операторной форме получаем

$$\det(\gamma^{/},\gamma^{//})\cdot\left\langle\gamma,D\gamma\right\rangle+\det(\gamma,\gamma^{/})\cdot\left\langle\gamma^{/},\gamma^{//}\right\rangle-\det(\gamma,\gamma^{//})\cdot\left\|\gamma^{/}\right\|^2=0\,.$$

Поскольку равенства нулю в (4.6) и (4.7) выполняются независимо от точки рассмотрения, то уравнение (4.1) вырождено в том смысле, что в классе дважды дифференцируемых кривых оно удовлетворяется не только в псевдовершинах, но и во всех других точках кривых.

Теорема доказана.

Замечание 1. *С точки зрения дифференциальной геометрии объяснение вырожденности условий (4.1) состоит в следующем. Точка* $t_1=t_0$ *является корнем и числителя и знаменателя дроби* $\dfrac{\gamma_1(t_2(t_1))+\gamma_1(t_1)-2x_*(t_1,t_2(t_1)))}{\gamma_2(t_2(t_1))+\gamma_2(t_1)-2y_*(t_1,t_2(t_1)))}$, *предел которой стоит в (4.4). Поскольку однократное дифференцирование числителя и знаменателя не избавило от неопределенности, то это означает, что* $t_1=t_0$ *является кратным корнем обеих функций. Кратность корня обусловливает при вычислении предела отношения привлечение производных более высокого порядка.*

Замечание 2. *Вырожденность необходимых условий второго порядка не следует рассматривать как отрицательный результат. Равенство (4.1) дает пищу для гипотез и содержит подсказки относительно необходимых условий второго порядка на классах кривых, имеющих «пониженную» гладкость. Вывод таких условий требует отдельного исследования. Скалярные функции, имеющие разрывы производной второго порядка, изучались ранее, например в [14; 24].*

В заключение отметим, что конструктивные условия для выявления псевдовершин в случае достаточно гладкой границы краевого множества получены в [25] и имеют форму необходимых условий третьего порядка.

Теорема 3 *(доказательство см.: [25]). Если* $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$ *– псевдовершина трижды дифференцируемой плоской кривой* $\Gamma=\gamma(T)$ *и в точке* $t=t_0$ *выполняются условия **(B1)–(B2)**, то с необходимостью в указанной точке выполняется одно из равенств:*

$$\gamma_2^{/}\left(\det(\gamma^{/},\gamma^{///})\left\|\gamma^{/}\right\|^2-3\det(\gamma^{/},\gamma^{//})\cdot\left\langle\gamma^{/},\gamma^{//}\right\rangle\right)=0, \tag{4.8}$$

$$\gamma_1^{/}\left(\det(\gamma^{/},\gamma^{///})\left\|\gamma^{/}\right\|^2-3\det(\gamma^{/},\gamma^{//})\cdot\left\langle\gamma^{/},\gamma^{//}\right\rangle\right)=0. \tag{4.9}$$

Интерпретация результата следующая. Псевдовершины краевого множества, порождающие сингулярные кривые, содержатся во множестве, объединяющем точки двух совокупностей. Первую совокупность составляют точки со стационарной кривизной, т. е. точки $\gamma=\gamma(t_0)$, в которых (см. (4.8) и (4.9)) выполняется равенство

$$\det\left(\gamma^{/},\gamma^{///}\right)\left\|\gamma^{/}\right\|^2-3\left\langle\gamma^{/},\gamma^{//}\right\rangle\det\left(\gamma^{/},\gamma^{//}\right)=0.$$

Вторую совокупность составляют точки $\gamma=\gamma(t_0)=(\gamma_1(t_0),\gamma_2(t_0))$, в которых одна компонента стационарная, а вторая таковой не является, т. е. в данном случае выполняется одно условие из двух: $\gamma_1^{/}(t_0)=0$ и $\gamma_2^{/}(t_0)\neq 0$ либо же $\gamma_2^{/}(t_0)=0$ и $\gamma_1^{/}(t_0)\neq 0$. Ясно, что два выделенных подмножества точек, вообще говоря, могут пересекаться по непустому множеству.

Примеры, поясняющие полученный результат и демонстрирующие его эффективность, также приведены в [26].

Литература

1. Кружков С. Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала, I // Матем. сборник. – 1975. – Т. 98, Вып. 3. – С. 450–493.
2. Субботин А. И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 254, № 2. – С. 293–297.
3. Crandall M. G., Lions P. L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1983. – Vol. 277, No. 1. – P. 1–42.
4. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. – М. ; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. – 336 с.
5. Колокольцов В. Н., Маслов В. П. Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // ДАН СССР. 1987. – № 296 (4). – С. 796–800.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. – М. : Наука, 1974. – 456 с.
7. Успенский А. А., Ушаков В. Н., Фомин А. Н. α-множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург, 2004. – 62 с.: 38 ил. – Библиогр.: 7 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004.
8. Успенский А. А. Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург, 2007. – 21 с.: 10 ил. – Библиогр.: 9 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 07.02.07, № 104-В2007.
9. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Труды 9-й Международной Четаевской конференции – 2007. – Т. 5. – С. 224–236.

10. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Известия высших учебных заведений. – 2008. – № 3. – С. 27–37.

11. Ушаков В. Н., Успенский А. А., Лебедев П. Д. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 182–191.

12. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстродействия с круговой индикатрисой // Труды Института математики и механики. – 2008. – Т. 14, № 4. – С. 82–100.

13. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 7. – С. 50–57.

14. Успенский А. А., Лебедев П. Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Труды Института математики и механики. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 171–186.

15. Ушаков В. Н., Успенский А. А., Лебедев П. Д. Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстродействия // Вестник Санкт-Петербургского университета. – Сер. 10. – 2013. – Вып. 3. – С. 157–167.

16. Успенский А. А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия // Труды Института математики и механики. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 276–290.

17. Слюсарев Г. Г. Геометрическая оптика. – Москва–Ленинград : Изд-во Академии наук СССР, 1946. – 332 с.

18. Бюшгенс С. С. Дифференциальная геометрия. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. – 300 с.

19. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. – М. : Фазис, 1996. – 334 с.

20. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. – М. : Мир, 1988. – 262 с.

21. Казаков А. Л., Лемперт А. А., Бухаров Д. С. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 6. – С. 87–100.

22. Лемперт А. А., Казаков А. Л., Бухаров Д. С. Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов // Управление большими системами : сборник трудов. – 2013. – № 41. – С. 270–284.

23. Успенский А. А. Производные в силу диффеоморфизмов и их приложения в теории управления и геометрической оптике // Труды Института математики и механики. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 252–266.

24. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 282–293.

25. Успенский А. А. Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Труды Института математики и механики. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 250–263.

Uspenskii Alexander Aleksandrovich,
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Staff Scientist,
Chief of a Sector, N. N Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Urb RAS;
Associate Professor at Finance and Bookkeeping Chair,
Liberal Arts University – University for Humanities (Ekaterinburg)

Lebedev Pavel Dmitriyevich,
Candidate of Physics and Mathematics, Staff Scientist,
N. N Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS (Ekaterinburg)

Degeneration of the Second Order Conditions in Pseudo Vertexes of Boundary Set Construction for Eikonal Equation

Conditions of non smooth singularities appearance for generalized solutions of the first order PDE are researched. Boundary Dirichlet problem for eikonal type equation is considered. The subject of study is a pseudo vertex of boundary set, which is necessary for analytical and numerical constructing of branches of the singular set, the solution of boundary problem loses smoothness on this set. Conditions providing correctness of limit transition in a definition of a pseudo vertex are obtained. Necessary conditions for pseudo vertex existence in case of smooth boarder are studied. It is proved that necessary conditions of the second order have a degenerated type. The opportunities of eikonal equations solutions logistics are suggested. These solutions construction are useful for minimization of outlay of stocks, technical support centers and gas station nets projection engineering.

Key words: The first order PDE; minimax solution; velocity; wave front; diffeomorhism; eikonal; optimal result function; singular set; symmetry; logistics.