

## Построение равновесных траекторий в динамических биматричных координационных играх<sup>1</sup>

В работе рассматривается задача построения равновесных траекторий в динамических биматричных координационных играх. Считается, что игроки распоряжаются движением инвестиционных средств, которое обладает свойством инертности по отношению к поступающим сигналам управления. Стратегии управления строятся на основе принципа обратной связи из теории дифференциальных игр, развиваемой в школе Н. Н. Красовского. Исследуется универсальная постановка игровой задачи, в которой динамика управляемой системы функционирует на бесконечном временном горизонте, а функционалы качества игроков определяются как предельные значения математических ожиданий выигрышей биматричных игр. Решение задачи построения равновесных траекторий осуществляется в рамках теории дифференциальных игр и теории обобщенных мини-максных решений уравнений в частных производных типа Гамильтона–Якоби. Для проверки свойств стабильности построенных решений используется техника сопряженных производных. Предложен алгоритм построения равновесных траекторий на основе стратегий управления, порожденных линиями переключения функций цены. Проводится исследование асимптотического поведения равновесных траекторий, которое выявляет тренды, важные, например, для анализа динамики инвестиций. Предложенный подход генерирует новые качественные свойства равновесных траекторий и обеспечивает значения функционалов выигрыша, превосходящие значения конкурентных статических равновесий по Нэшу. Полученный результат осуществляет идею сдвига динамической системы из неблагоприятного конкурентного равновесия по Нэшу к кооперативным точкам максимума Парето с лучшими значениями функционалов выигрыша. В качестве приложения рассматривается модель инвестиций в газотранспортные системы Восточной Сибири, для которой строятся равновесные траектории, и проводится анализ эффективности вложений.

**Ключевые слова:** динамические биматричные координационные игры; равновесные траектории; сопряженные производные функций цены; динамические игровые модели инвестиций.

### Введение

Работа посвящена построению динамических равновесных траекторий в биматричных координационных играх. Динамика системы обеспечивает возможность управления поведением игроков с помощью управляющих сигналов [5; 6; 9; 14; 16; 17; 19]. Предполагается, что действия игроков инертны в том смысле, что только часть средств может быть инвестирована в каждом временном периоде согласно управляющим сигналам. Управляющие параметры в системе не фиксированы априори и могут быть построены на принципе обратной связи в рамках теории дифференциальных игр [4; 7; 13; 18].

Игровая динамика рассматривается на бесконечном горизонте времени, и, соответственно, функционалы качества игроков определяются как пределы средних

---

\* **Николай Андреевич Красовский**, канд. физ.-мат. наук, математик отдела динамических систем Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).

E-mail: nkrasovskiy@gmail.com

\*\* **Александр Михайлович Тарасьев**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры менеджмента и маркетинга, АНО ВО «Гуманитарный университет»; заведомо динамических систем Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).

E-mail: tam@imm.uran.ru

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке проекта УрО РАН 15-16-1-13.

значений, вычисленных по матрицам выигрышей. Такая постановка задачи направлена на нахождение устойчивых ситуаций равновесия в играх, связанных с долгосрочными инвестициями [8].

Для решения задачи используются подходы к методам построения динамического равновесия по Нэшу в неантагонистических позиционных дифференциальных играх, которые развивались в работах А.Ф. Клейменова [3] на основе универсальных стратегий Н. Н. Красовского [7; 18].

Элементы динамического равновесия по Нэшу основаны на гарантированных обратных связях [7; 13; 18], которые можно получить в рамках теории обобщенных минимаксных решений [11] для уравнений Гамильтона–Якоби. В работе аналитически строятся функции цены для серии дифференциальных игр и их свойства стабильности верифицируются с помощью техники сопряженных производных [12]. Равновесные траектории генерируются управляющими линиями переключения функций цены.

Асимптотические свойства равновесных траекторий исследуются для различных начальных положений динамической биматричной игры. Показано, что предложенный подход порождает новые качественные свойства для равновесных траекторий и гарантирует лучшие значения функционалов выигрыша, чем репликаторная динамика в эволюционных играх или значения равновесия по Нэшу в статических биматричных играх. Отметим, что этот результат сочетается с идеей сдвига динамической системы из неблагоприятного равновесия по Нэшу к решениям максимума Парето или решениям с лучшими значениями функционалов выигрыша [1; 2; 5; 6; 19; 20].

Эффективность разработанных алгоритмов демонстрируется приложениями для построения равновесной динамики взаимодействия игроков в биматричных координационных играх. В качестве примера выбрана модель инвестиций в два проекта строительства газопроводов в Восточной Сибири. Игроками выступают российская компания «Газпром» и «Китайская национальная нефтегазовая корпорация». Объектами инвестиций являются две газотранспортные системы: «Сахалин–Хабаровск–Владивосток» и «Сила Сибири». Значения матриц выигрышей игроков при инвестициях в газотранспортные системы выражены в виде процентных ставок и означают выгоду от соответствующих инвестиций. Значения доходности инвестиций в этих матрицах основаны на реальных данных [10; 22; 23].

Рассматриваются два варианта биматричных координационных игр с разными матрицами выигрышей в соответствии с разными сценариями доходности инвестиций. В первом варианте равновесные траектории при любых начальных данных сходятся к точке равновесия по Нэшу с координатами (1,1), которая обладает кооперативными свойствами точек максимума Парето. Это означает, что инвестиционные средства в динамике переходят полностью в первый проект, которым является газотранспортная система «Сахалин». Во втором варианте равновесные траектории сходятся к точкам границы квадрата, которые также обладают кооперативными свойствами точек максимума Парето. Значения функционалов выигрыша игроков в предельных точках равновесных траекторий имеют лучшие показатели, чем в точке статического равновесия по Нэшу.

### Динамическая игра

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая описывает динамику поведения двух групп (коалиций) игроков или движение инвестиционных средств:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + u, \\ \dot{y} &= -y + v.\end{aligned}$$

Здесь параметры  $x, 0 \leq x \leq 1$  и  $y, 0 \leq y \leq 1$  определяют доли инвестиционных средств, направляемых в соответствующий проект. Другая интерпретация

может быть связана с вероятностной постановкой, в которой параметры  $x$  и  $y$  задают вероятности того, как выбранные игроки придерживаются своих выбранных стратегий. Управляющие параметры  $u$  и  $v$  удовлетворяют условиям  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$  и являются сигналами, recommending смену стратегий игроками. Например, значение  $u = 0$  ( $v = 0$ ) соответствует сигналу: «сменить первую стратегию на вторую». Значение  $u = 1$  ( $v = 1$ ) соответствует сигналу: «сменить вторую стратегию на первую». Значение  $u = x$  ( $v = y$ ) соответствует сигналу: «сохранять предыдущую стратегию». В частности, в игре, моделирующей инвестиционный процесс, управляющие сигналы  $u, v$  задают движение средств из одного проекта в другой.

Терминальные функционалы качества определяются как математическое ожидание выигрышей, задаваемых соответствующими матрицами  $A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}, i, j = 1, 2$  в биматричной игре, и могут быть интерпретированы как «локальные» интересы игроков:

$$g_A(x(T), y(T)) = C_A x(T) y(T) - \alpha_1 x(T) - \alpha_2 y(T) + a_{22}$$

в заданный момент времени  $T$ . Здесь параметры  $C_A, \alpha_1, \alpha_2$  определяются в соответствии с классической теорией биматричных игр [1]:

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22},$$

$$\alpha_1 = a_{22} - a_{12},$$

$$\alpha_2 = a_{22} - a_{21}.$$

Функционал качества  $g_B$  второго игрока определяется аналогично в соответствии с коэффициентами матрицы  $B$ .

«Глобальные» интересы  $J_A^\infty$  первого игрока определяются как предельные соотношения для функционалов качества на бесконечном горизонте планирования:

$$J_A^\infty = [J_A^-, J_A^+],$$

$$J_A^- = \liminf_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)),$$

$$J_A^+ = \limsup_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)).$$

Интересы  $J_B^\infty$  второго игрока определяются аналогично.

Рассматривается решение динамической игры на основе теории оптимального управления [21] и теории дифференциальных игр [7]. Следуя работам [3; 5; 6; 7; 9], представим понятие динамического равновесия по Нэшу в классе позиционных стратегий (обратных связей)  $U = u(t, x, y, \varepsilon), V = v(t, x, y, \varepsilon)$ .

*Определение 1*

Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Пара обратных связей  $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon), V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$  называется равновесием по Нэшу для начального положения  $(x_0, y_0)$ , если для любых других обратных связей  $U = u(t, x, y, \varepsilon), V = v(t, x, y, \varepsilon)$  выполняется следующее условие: неравенства

$$J_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq J_A^+(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) - \varepsilon,$$

$$J_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq J_B^+(x_2(\cdot), y_2(\cdot)) - \varepsilon$$

выполняются для всех траекторий

$$(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U^0, V^0),$$

$$(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U, V^0),$$

$$(x_2(\cdot), y_2(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U^0, V),$$

Здесь символ  $X$  обозначает множество траекторий, которые стартуют из начальной позиции  $(x_0, y_0)$  и генерируются соответствующими стратегиями  $(U^0, V^0)$ ,  $(U, V^0)$ ,  $(U^0, V)$ .

Динамическое равновесие по Нэшу может быть построено путем склейки «**позитивных**» обратных связей  $u_A^0, v_B^0$  и «**наказывающих**» обратных связей  $u_B^0, v_A^0$  в соответствии с соотношениями [3]:

$$U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon) = \begin{cases} u_A^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ u_B^0(x, y), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon) = \begin{cases} v_B^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ v_A^0(x, y), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

### Функция цены для «**позитивных**» обратных связей

Основное значение при построении динамического равновесия по Нэшу принадлежит «**позитивным**» обратным связям  $u_A^0, v_B^0$ , которые гарантированно максимизируют значения величин  $g_A, g_B$  на бесконечном горизонте времени  $T \rightarrow \infty$ . С этой целью строятся функции цены  $w_A, w_B$  в играх с нулевой суммой на бесконечном горизонте. Основываясь на методе обобщенных характеристик уравнений Гамильтона–Якоби, получим аналитическую структуру функции цены. В случае, когда  $C_A > 0$ , функция цены  $w_A$  определяется системой четырех функций:

$$w_A(x, y) = \psi_A^i(x, y), \quad \text{если } (x, y) \in E_A^i, \quad i = 1, \dots, 4,$$

$$\psi_A^1(x, y) = a_{22} - \frac{(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2}{4C_A xy},$$

$$\psi_A^2(x, y) = a_{11} - \frac{((C_A - \alpha_1)(1-x) + (C_A - \alpha_2)(1-y))^2}{4C_A(1-x)(1-y)},$$

$$\psi_A^3(x, y) = C_A xy - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22},$$

$$\psi_A^4(x, y) = \frac{a_{22}C_A - \alpha_1\alpha_2}{C_A} = v_A.$$

Здесь  $v_A$  является ценой статической игры с матрицей  $A$ . Функция цены  $w_A$  представлена на рисунке 1. Здесь показаны линии  $KA_1, KA_2, KA_3, KA_4, KA_5$ , которые делят квадрат возможных ситуаций игры на области  $EA_1, EA_2, EA_3, EA_4$ , в которых функция цены определяется функциями  $\psi_A^1, \psi_A^2, \psi_A^3, \psi_A^4$ . Наиболее значимыми из них являются линии  $KA_2, KA_3$ , которые определяют смену сигналов в стратегии управления и поэтому называются линиями переключения.

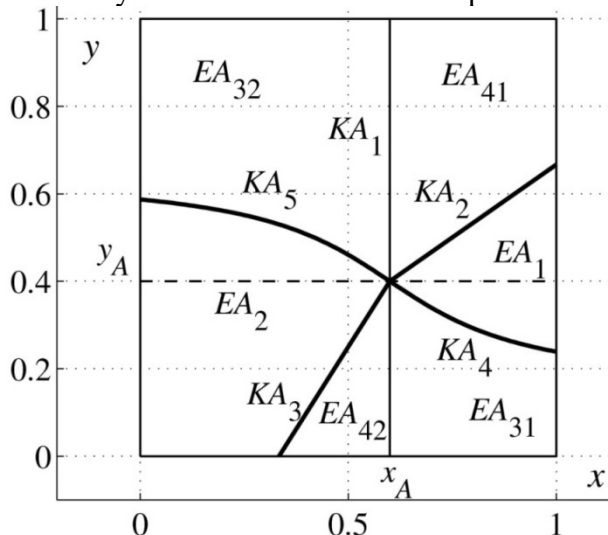


Рис. 1. Структура функции цены  $w_A$

Показано, что функция цены  $w_A$  имеет свойства  $u$ -стабильности и  $v$ -стабильности [7; 18], что может быть выражено в виде сопряженных производных [12]:

$$\begin{aligned} D_s w_A(x, y) | s &\leq H(x, y, s), & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ s &= (s_1, s_2) \in R^2, \\ D^* w_A(x, y) | s &\geq H(x, y, s), & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ w_A(x, y) &\leq g_A(x, y), & s = (s_1, s_2) \in R^2. \end{aligned}$$

Здесь сопряженные производные  $D_s w_A$  и  $D^* w_A$  и Гамильтониан  $H$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} D_s w_A(x, y) | s &= \sup_{h \in R^2} (\langle s, h \rangle - \partial_- w_A(x, y) | (h)), \\ D^* w_A(x, y) | s &= \inf_{h \in R^2} (\langle s, h \rangle - \partial_+ w_A(x, y) | (h)), \\ H(x, y, s) &= -s_1 x - s_2 y + \max\{0, s_1\} + \max\{0, s_2\}. \end{aligned}$$

### Модель

Рассмотрим пример координационной игры. Напомним, что в таких играх функции выигрышей игроков не являются прямо противоположными и подразумевают скоординированные решения. Например, такая ситуация описывает процесс инвестирования в два аналогичных проекта.

Возьмем для примера ситуацию инвестирования средств двумя компаниями в два проекта строительства газопроводов. Пусть первым игроком является российская компания «Газпром», вторым игроком «Китайская национальная нефтегазовая корпорация». Компании инвестируют средства в два проекта: «Сахалин–Хабаровск–Владивосток» и «Сила Сибири».



Рис. 2. Газопроводы «Сахалин» и «Сила Сибири». (Источник: gazprom.ru)

На рисунке 2 газопровод «Сахалин» показан сплошной линией, а газопровод «Сила Сибири» – пунктирной линией.

Проект газотранспортной системы «Сахалин–Хабаровск–Владивосток» является первой на востоке России межрегиональной газотранспортной системой. Она предназначена для доставки газа, добываемого на шельфе Сахалина, потребителям Хабаровского и Приморского краев. Газотранспортная система создала условия для их масштабной газификации и поставок газа в страны Азиатско-Тихоокеанского региона, в том числе в Китай. Для нашей модели важным обстоятельством является то, что значительная часть этой газотранспортной системы до Владивостока уже построена.

Магистральный газопровод «Сила Сибири» будет транспортировать газ Иркутского и Якутского центров газодобычи российским потребителям на Дальнем Востоке и в Китай («восточный» маршрут). Этот проект отличается от проекта «Сахалин» тем, что значительная его часть еще не построена.

Согласно источникам [23], средневзвешенная норма доходности (WACC) функционирующего газотранспортного проекта составляет 13 %. Предполагается, что при условии продления газопровода «Сахалин–Хабаровск–Владивосток» на территорию Китая компания «Газпром» на новом участке будет иметь 10%-ную доходность инвестиций, а Китайская компания будет иметь 16%-ную доходность с учетом равно долевого участия. При этом доходность рассчитывается для доходов, полученных в валютно-экспортных торговых операциях. Если же продолжение газопровода «Сахалин–Хабаровск–Владивосток» на территории Китая не будет функционировать, то Китайская компания получает нулевую доходность, а «Газпром» будет получать 7%-ную доходность с учетом инфляции и понижения курса рубля на функционирующей части газопровода в России.

Согласно данным из работы [10] средневзвешенная норма доходности строящегося проекта «Сила Сибири» составляет 17 %. В связи с этим доходность компании «Газпром» как собственника проекта может составить 23 %, а доходность китайской компании [22] составит 11% при условии равно долевого участия. В случае если проект «Сила Сибири» не будет реализован, доходности обеих компаний равны нулю.

Указанные данные могут быть формализованы в матрицах биматричной игры. В этой игре выбор первой строки первым игроком (компанией «Газпром») означает инвестирование в проект «Сахалин», а второй строки – в проект «Сила Сибири». При этом выбор первого столбца вторым игроком («Китайская национальная нефтегазовая корпорация») означает инвестирование им в проект «Сахалин», а второго столбца – в проект «Сила Сибири». Выигрыши игроков определяются как доходность от соответствующих инвестиций, выраженная в виде процентных ставок. Первая матрица (матрица А) соответствует выигрышам компании «Газпром» (первого игрока), а вторая матрица (матрица В) описывает выигрыши Китайской компании (второго игрока).

Таким образом, матрицы выигрышей первого и второго игрока задаются следующими параметрами, выражающими процентные ставки доходности инвестиционных проектов:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Видно, что игроки ничего не выигрывают или выигрывают мало, если вкладываются в разные проекты, и, наоборот, получают больше выгоды, когда вкладываются в одинаковые проекты.

Параметры статической биматричной игры определяются соотношениями:

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 10 - 7 - 0 + 23 = 26,$$

$$\alpha_1 = a_{22} - a_{12} = 23 - 7 = 16,$$

$$\alpha_2 = a_{22} - a_{21} = 23 - 0 = 23,$$

$$x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} = \frac{23}{26} = 0.88,$$

$$y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} = \frac{16}{26} = 0.62,$$

$$C_B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 16 - 0 - 0 + 11 = 25,$$

$$\beta_1 = b_{22} - b_{12} = 11 - 0 = 11,$$

$$\beta_2 = b_{22} - b_{21} = 11 - 0 = 11,$$

$$x_B = \frac{\beta_2}{C_B} = \frac{11}{25} = 0.44,$$

$$y_B = \frac{\beta_1}{C_B} = \frac{11}{25} = 0.44,$$

Такой вариант биматричной игры подразумевает существование трех статических равновесий по Нэшу [1].

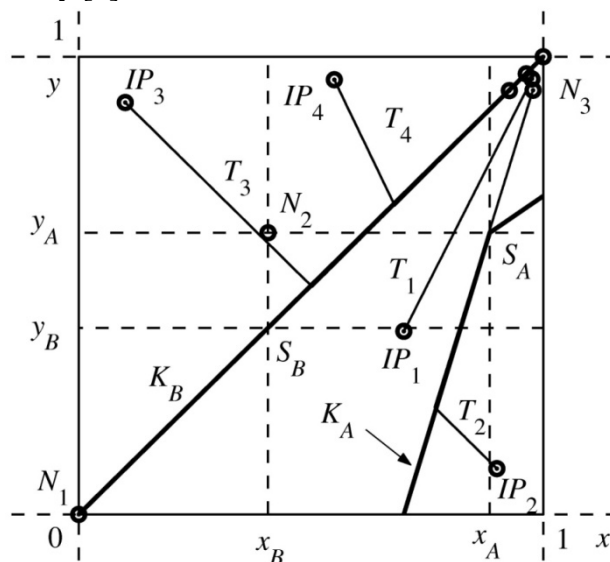


Рис. 3. Равновесные траектории в биматричной координационной игре. Сценарий 1

На рисунке 3 представлен случай с тремя статическими равновесиями по Нэшу  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  в биматричной координационной игре. Управляющие линии переключения  $K_A$ ,  $K_B$  генерируются функцией цены, построенной с помощью теории обобщенных минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби. Отметим, что линии переключения  $K_A$ ,  $K_B$  связаны с седловыми точками  $S_A$ ,  $S_B$  антагонистических матричных игр с матрицами  $A$  и  $B$  соответственно и ориентированы на вершины квадрата возможных ситуаций игры. Проведены вычислительные эксперименты, в которых равновесные траектории  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  начинают движение из начальных позиций  $IP_1$ ,  $IP_2$ ,  $IP_3$ ,  $IP_4$ , расположенных в качественно различных областях игры. В рассматриваемом сценарии 1 линии переключения  $K_A$  и  $K_B$  не пересекаются, и поэтому, отсутствует точка пересечения, к которой могли бы сходиться равновесные траектории. В этом сценарии равновесные траектории имеют следующее качественное поведение: они двигаются вдоль характеристик уравнений Гамильтона–Якоби, затем встречаются с линиями переключения  $K_A$  или  $K_B$  и после этого скользят вдоль этих линий в направлении точки равновесия по Нэшу  $N_3$ , которая обладает также свойствами точек максимума Парето. Значения функционалов выигрыша обоих игроков в асимптотически предельной точке  $N_3$  равны следующим значениям процентных ставок доходности:

$$g_A(N_3) = 10, \quad g_B(N_3) = 16,$$

которые выше значений ставок доходности в точке конкурентного равновесия по Нэшу  $N_2$ :

$$g_A(N_2) = 8.8, \quad g_B(N_2) = 6.5.$$

Таким образом, в сценарии 1 осуществляется сдвиг от неблагоприятного конкурентного равновесия по Нэшу  $N_2$  к благоприятному кооперативному равновесию  $N_3$ , обладающему свойством точки максимума Парето.

Рассмотрим второй сценарий игры, при котором матрицы выигрышей (процентных ставок доходности) игроков немного исправляются по сравнению с первым сценарием:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 7 & 23 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Аналогично формулам решения статических биматричных игр [1] получаются следующие значения для координат седловых точек и точки равновесия по Нэшу  $N_2$ :

$$\begin{aligned} x_A &= 0.62, & y_A &= 0.88, \\ x_B &= 0.27, & y_B &= 0.42. \end{aligned}$$

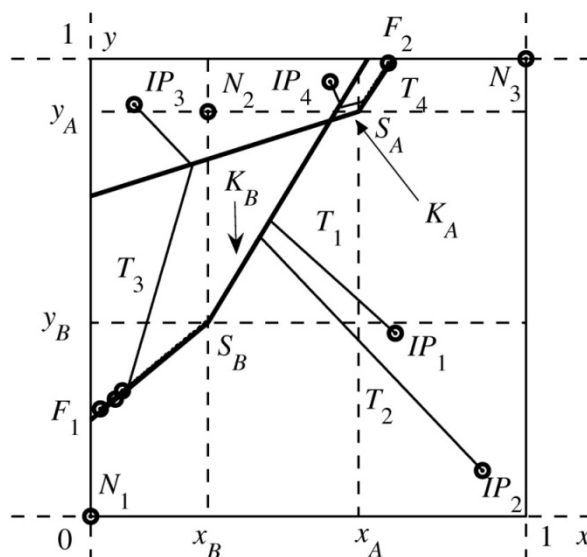


Рис. 4. Равновесные траектории в биматричной координационной игре. Сценарий 2

На рисунке 4 показан случай, в котором линии переключения  $K_A$  и  $K_B$  пересекаются внутри квадрата возможных ситуаций игры. Отметим, что в сценарии 2 точка пересечения линий переключения  $K_A$ ,  $K_B$  не является притяжением равновесных траекторий, как это происходит в модели Курно [15]. Вычислительные эксперименты показывают, что равновесные траектории имеют следующее качественное поведение: они двигаются вдоль характеристик уравнений Гамильтона–Якоби, затем встречаются с линиями переключения  $K_A$  или  $K_B$  и после этого скользят вдоль этих линий переключения до тех пор, пока не встретятся с границами единичного квадрата, которые обладают свойствами точек максимума Парето.

Отметим, что в сценарии 2 предельные точки равновесных траекторий зависят от начальных позиций  $IP_1$ ,  $IP_2$ ,  $IP_3$ ,  $IP_4$ , расположенных в качественно различных областях игры. Так, для начальных позиций  $IP_1$ ,  $IP_2$ ,  $IP_3$  траектории  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  сходятся к точке  $F_1$ , имеющей свойство максимума Парето и лежащей на левой границе квадрата. Для начальной позиции  $IP_4$  траектория  $T_4$  сходится к точке  $F_2$ , имеющей свойство максимума Парето и лежащей на верхней границе квадрата.

Во втором сценарии, так же как и в первом, значения функционалов выигрыша игроков (в виде процентных ставок доходности) в предельных точках  $F_1$ ,  $F_2$  равновесных траекторий  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  строго больше, чем значения функционалов выигрыша в точке конкурентного статического равновесия по Нэшу  $N_2$ :

$$\begin{aligned} g_A(F_1) &= 19.6, & g_B(F_1) &= 9.5, \\ g_A(F_2) &= 9.1, & g_B(F_1) &= 14.4, \\ g_A(N_2) &= 8.8, & g_B(N_2) &= 8.0. \end{aligned}$$



Очевидно, что и во втором сценарии происходит сдвиг от неблагоприятного конкурентного статического равновесия  $N_2$  к благоприятным точкам динамического равновесия  $F_1, F_2$ , обладающим свойствами максимума Парето.

### Литература

1. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М. : Наука, 1985.
2. Зенкевич Н. А., Петросян Л. А., Янг Д. В. К. Динамические игры и их приложения в менеджменте. – СПб. : Высшая школа менеджмента, 2009.
3. Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. – Екатеринбург : Наука, 1993.
4. Красовский А. Н., Ладейщиков А. Н., Чой Е. С. Некоторые задачи оптимального управления при дефиците информации. – Екатеринбург : УрГАУ, 2014.
5. Красовский Н. А., Кряжимский А. В., Тарасьев А. М. Уравнения Гамильтона–Якоби в эволюционных играх // Труды ИММ УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 114–131.
6. Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Равновесные решения в динамических играх. – Екатеринбург : УрГАУ, 2015.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. – М. : Наука, 1974.
8. Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции. – СПб. : Питер, 2000.
9. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О дифференциально-эволюционных играх // Труды МИАН. – 1995. – Т. 211. – С. 257–287.
10. Никонов О. И., Минуллин Я. Е. Равновесные модели развития энергетических инфраструктур // Вестник УГТУ-УПИ. – 2003. – № 1. – С. 100–109.
11. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. – М. : Наука. 1991. – 214 с.
12. Субботин А. И., Тарасьев А. М. Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 283, № 3. – С. 559–564.
13. Ушаков В. Н., Гусейнов Х. Г., Латушкин Я. А., Лебедев П. Д. О совпадении максимальных стабильных мостов в двух игровых задачах о сближении для стационарных управляемых систем // Труды ИММ УрО РАН. – 2009. – Т. 1, № 3. – С. 219–240.
14. Friedman D. Evolutionary Games in Economics // Econometrica. – 1991. – Vol. 59, No. 3. – P. 637–666.
15. Intriligator M. Mathematical Optimization and Economic Theory. – New York : Prentice-Hall, 1971.
16. Klaassen G., Kryazhinskii A., Tarasyev A. Competition of Gas Pipeline Projects: Game of Timing. – Laxenburg : IIASA, 2001. – IR-01-037.
17. Krasovskii A. A., Matrosov I. V., Tarasyev A. M. Optimal Timing Control in Game Modeling of an Energy Project Infrastructure // Nonlinear Analysis. – 2009. – Vol. 71, No. 12. – P. E2498-E2506.
18. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control Under Lack of Information. – Boston etc. : Birkhauser, 1995.
19. Krasovskii N. A., Tarasyev A. M. Decomposition Algorithm of Searching Equilibria in a Dynamic Game // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, No. 10. – P. 1865–1893.
20. Petrosjan L. A., Mazalov V. V. Handbook of Game Theory. – New York : Nova Science Pub Inc, 2008.
21. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., and Mischenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. – New York : Interscience, 1962.
22. Годовой отчет компании «Китайская национальная нефтегазовая корпорация» за 2013 год [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.cnpc.com.cn/ru/>
23. Годовой отчет ПАО «Газпром» за 2015 год «Многополярная энергия» [Электронный ресурс]. – URL: [www.gazprom.ru/f/posts/91/902567/gazprom-annual-report-2015-ru.pdf](http://www.gazprom.ru/f/posts/91/902567/gazprom-annual-report-2015-ru.pdf)

**Nikolay Andreyevich Krasovskii,**

Candidate of Physics and Mathematics,  
Mathematician of the Dynamic Systems Department,  
Krasovskii Institute of Mathematics  
and Mechanics UrB RAS (Ekaterinburg)

**Alexander Mikhailovich Tarasyev,**

Doctor of Physics and Mathematics,  
Professor at Management and Marketing Chair,  
Liberal Arts University – University for Humanities;  
Head of the Dynamic Systems Department,  
Krasovskii Institute of Mathematics  
and Mechanics UrB RAS (Ekaterinburg)

### **Construction of Equilibrium Trajectories in Dynamical Bimatrix Coordination Games**

The paper deals with the problem of construction of equilibrium trajectories in dynamical bimatrix coordination games. Players manage the investment motion, which is inertial with respect to control signals. Control strategies are constructed via the feedback principle from the differential games theory, developed in N.N. Krasovskii's scientific school. The universal formulation of the game problem is investigated, in which the dynamics of the controlled system operates on the infinite time horizon, and players' functionals are determined as the limit of the expected values of bimatrix games payoffs. The solution for the problem of construction of equilibrium trajectories is implemented in the framework of the differential games theory and the theory of generalized minimax solutions of partial differential equations of the Hamilton-Jacobi type. The technique of conjugate derivatives is used to verify the stability property for the proposed solutions. An algorithm for construction of equilibrium trajectories is designed based on control strategies, generated by switching lines of the value function. The asymptotic behavior of equilibrium trajectories is investigated, which reveals important trends for the investments dynamics analysis. The proposed approach generates new qualitative properties of equilibrium trajectories and provides better results than values of competitive static Nash equilibria. The obtained result implements the idea for shifting the dynamical system from unfavorable competitive Nash equilibria to cooperative Pareto maximum points with better payoffs. As an application, a model of investments is examined for East Siberian gas pipeline projects, in which equilibrium trajectories are constructed and investment efficiency is analyzed.

**Key words:** dynamical bimatrix coordination games; equilibrium trajectories; conjugate derivatives of value functions; dynamical game models of investments.