УДК 338.3

О. В. Пиксайкина*, Е. А. Ходенева**

Экономико-математическая модель оптимизации управления бизнес-процессами производственного предприятия

В данной статье рассматривается экономико-математическая модель оптимизации управления бизнес-процессами. Решается многокритериальная задача с использованием вектора, и формируется задача линейного математического программирования. Для решения многокритериальной оптимизационной задачи использовался метод обобщенного критерия (метод скаляризации). По итогу решения задачи требуется получить максимальный объем продаж; максимальную прибыль; минимальную себестоимость; минимальную трудоемкость изготовления продукции.

Ключевые слова: оптимизация; многокритериальная экономико-математическая модель; бизнес-процессы; номенклатура продукции; технологии.

Проблема оптимизации управления бизнес-процессами производственного предприятия является одной из базовых при реализации процедуры реинжиниринга [1]. Причем при исследовании этой проблемы необходимо учитывать сложность организационной структуры конкретного предприятия, его отраслевую принадлежность, номенклатуру выпускаемой продукции, уровень автоматизации процессов и другие факторы [1–3].

В данной статье для решения *задачи оптимизации управления бизнес-процессами предприятия* предлагается использовать экономико-математическое моделирование в форме многокритериальной задачи оптимизации управления, решение которой сводится к реализации конечной последовательности задач дискретной оптимизации и линейного математического программирования. Результаты данной работы основываются на исследованиях [2; 3] и могут быть использованы для решения других оптимизационных задач в экономике. Математические модели таких задач представлены, например, в работах [4–6].

В данной работе рассматривается *многокритериальная задача оптимизации управления бизнес-процессами производственного предприятия.*

Пусть предприятие производит n видов продукции и реализует ее на рынке. Имеется K всех допустимых вариантов реализации бизнес-процессов предприятия, образующих множество $\boldsymbol{B}_K = \{\boldsymbol{B}_k\}_{k\in\overline{1,K}}$, где $\boldsymbol{B}_k$ – k-й вариант $(\overline{1,K} = \{1,2,\ldots,K\})$. Зафиксируем k-й вариант реализации бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k$ $(k\in\overline{1,K})$. Предполагается, что при реализации k-го варианта бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k$ $(k\in\overline{1,K})$ для производства продукции используются m_k различных типов ресурсов. Расход i-го ресурса $(i\in\overline{1,m_k})$ на единицу продукции j-го вида $(j\in\overline{1,n})$ при реализации k-го варианта бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k$ составляет $a_{ij}^{(k)}$ единиц. Первоначальные запасы i-го сырья в единицу времени известны и составляют $b_i^{(k)}$ единиц $(i\in\overline{1,m_k})$. Причем запас ресурсов может быть пополнен в

* **Ольга Владимировна Пиксайкина,** канд. экон. наук, замдекана факультета бизнеса и управления, АНО ВО «Гуманитарный университет» (г. Екатеринбург).

** **Елена Алексеевна Ходенева,** аспирант АНО ВО «Гуманитарный университет» (г. Екатеринбург).

начале планового периода. При реализации k-го варианта бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k$ предприятие располагает финансовыми средствами в размере $\boldsymbol{L}_k$ единиц, а производственные ресурсы можно приобрести по ценам q_i за i-й ресурс $(i \in \overline{1,m_k})$. Емкость рынка по каждому виду продукции оценена и составляет $\boldsymbol{S}_{max\, j}$ единиц $(j \in \overline{1,n})$. Для каждого вида продукции рассчитана точка безубыточности $\boldsymbol{S}_{min\, j}$ единиц $(j \in \overline{1,n})$.

Тогда можно сформулировать следующую *многокритериальную задачу оптимизации управления бизнес-процессами производственного предприятия*.

Требуется найти *оптимальный вариант реализации бизнес-процессов* $\boldsymbol{B}_{k_{opt}} = \boldsymbol{B}_k \in \boldsymbol{B}_K$ $(k = k_{opt} \in \overline{1,K})$, такой, чтобы существовала возможность сформировать соответствующий ему план выпуска готовой продукции, характеризующийся:

– максимальным объемом продаж в стоимостном выражении;
– максимальной прибылью;
– минимальной себестоимостью;
– минимальной трудоемкостью изготовления продукции.

Управляющие переменные для данной задачи имеют вид:

$z^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)}) = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, ..., y_{m_k}^{(k)}) \in \mathbf{R}^{(n+m_k)}$ – вектор, включающий плановые объемы задания по выпуску готовой продукции (первые n компонент) и первоначальной закупке производственных ресурсов (последующие m_k компонент) при реализации k-го варианта бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k \in \boldsymbol{B}_K$ $(k \in \overline{1,K})$. Здесь и далее для любого $k \in \mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ есть множество всех натуральных чисел, $\mathbf{R}^k$ – k-мерное векторное пространство векторов-столбцов (даже если из экономии места они записаны в виде строки).

Тогда, в результате экономико-математического моделирования, для каждого k-го варианта реализации бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k \in \boldsymbol{B}_K$ $(k \in \overline{1,K})$ можно сформировать следующую задачу линейного математического программирования:

$$\boldsymbol{XY}_k = \begin{cases} z^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)}):\ (x^{(k)}, y^{(k)}) \in \mathbf{R}^{(n \times m_k)}, \\ \boldsymbol{S}_{min\, j} \le x_j^{(k)} \le \boldsymbol{S}_{max\, j},\ j \in \overline{1,n}; \\ A^{(k)} x^{(k)} \le b^{(k)} + y^{(k)}; \\ < q, y^{(k)} >_{m_k} \le \boldsymbol{L}_k; \\ b^{(k)} = (b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, ..., b_{m_k}^{(k)}) \in \mathbf{R}^{m_k}, \\ q = (q_1, q_2, ..., q_{m_k}) \in \mathbf{R}^{m_k}, \\ y^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, ..., y_{m_k}^{(k)}) \in \mathbf{R}^{m_k}; \\ x_j^{(k)},\ \boldsymbol{S}_{min\, j},\ \boldsymbol{S}_{max\, j} \in \mathbf{R}^1; \end{cases} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
&f_1^{(k)} = -\langle c, x\rangle_n \to min,\\
&f_2^{(k)} = -\left\langle p^{(k)}, x\right\rangle_n \to min,\\
&f_3^{(k)} = \boldsymbol{S}_0^{(k)} + \left\langle r^{(k)}, x\right\rangle_n + \langle q, y\rangle_n \to min,\\
&f_4^{(k)} = \left\langle t^{(k)}, x\right\rangle_n \to min.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где $A^{(k)} = \left\| a_{ij}^{(k)} \right\|$, $i \in \overline{1, m_k}$, $j \in \overline{1, n}$ – матрица порядка $(m_k \times n)$; c_j – цена единицы продукции j-го вида $(j \in \overline{1, n})$, а $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbf{R}^n$ – вектор цен; $p_j^{(k)}$ – прибыль от единицы продукции j-го вида $(j \in \overline{1, n})$ при реализации k-го варианта бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k$, а $p^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, ..., p_n^{(k)}) \in \mathbf{R}^n$ – соответствующий вектор прибыли; $\boldsymbol{S}_0^{(k)}$ – общая сумма накладных расходов при реализации k-го варианта бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k$; $r_j^{(k)}$ – объем прямых расходов на производство единицы продукции j-го вида $(j \in \overline{1, n})$ при реализации k-го варианта бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k$, а $r^{(k)} = (r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, ..., r_n^{(k)}) \in \mathbf{R}^n$ – соответствующий вектор прямых расходов; $t_j^{(k)}$ – трудоемкость изготовления единицы продукции j-го вида $(j \in \overline{1, n})$ при реализации k-го варианта бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k$, а $t^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, ..., t_n^{(k)}) \in \mathbf{R}^n$ – соответствующий вектор трудоемкости; для любых натурального числа $\alpha \in \mathbf{N}$ и векторов $s, d \in \mathbf{R}^\alpha$ символом $\langle s, d\rangle_\alpha$ обозначается их скалярное произведение.

В данной многокритериальной задаче (1), (2) для фиксированного k-го варианта реализации бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k$ $(k \in \overline{1, K})$ необходимо найти наилучшее решение $z^{(e,k)} = (x^{(e,k)}, y^{(e,k)}) = (x_1^{(e,k)}, x_2^{(e,k)}, ..., x_n^{(e,k)}, y_1^{(e,k)}, y_2^{(e,k)}, ..., y_{m_k}^{(e,k)}) \in \boldsymbol{XY}_k$, руководствуясь четырьмя различными целями, описываемыми (2). Причем эти цели в той или иной степени противоречат друг другу, т.е. нет такого допустимого решения, которое было бы лучше других из области всех допустимых решений $\boldsymbol{XY}_k \subset \mathbf{R}^{(n \times m_k)}$ данной задачи, описываемой ограничениями (1), с точки зрения всех рассматриваемых четырех критериев, введенных соотношениями (2).

Для решения рассматриваемой многокритериальной оптимизационной задачи, описываемой соотношениями (1), (2), воспользуемся *методом обобщенного критерия* (*методом скаляризации*) [4].

Тогда, для оценивания качества управления рассматриваемыми бизнес-процессами, описываемыми системой (1), (2), для каждого фиксированного k-го варианты реализации бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k \in \boldsymbol{B}_K$ ($k \in \overline{1, K}$), введем в рассмотрение векторный функционал (показатель качества процесса) $\boldsymbol{F}^{(k)} = (\boldsymbol{F}_1^{(k)}, \boldsymbol{F}_2^{(k)}, \boldsymbol{F}_3^{(k)}, \boldsymbol{F}_4^{(k)})$, представляющий собой набор из 4 линейных функционалов $\boldsymbol{F}_i^{(k)}$: $\mathbf{R}^{(n \times m_k)} \to \mathbf{R}^1$ ($i \in \overline{1, 4}$), таких, что для реализации набора $z^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)}) \in \mathbf{R}^{(n \times m_k)}$ их значения определяются следующими соотношениями:

$$\boldsymbol{F}_i^{(k)}(z^{(k)}=(x^{(k)},y^{(k)}))=f_i^{(k)}(x^{(k)},y^{(k)}),\ i\in\overline{1,4}, \tag{3}$$

где $f_i^{(k)}:\ \mathbf{R}^{(n\times m_k)}\to\mathbf{R}^1$ – линейный функционал, для каждого $i\in\overline{1,4}$ определяемый одним из соотношений (2).

На основании введенного соотношением (3) векторного функционала $\boldsymbol{F}^{(k)}=(\boldsymbol{F}_1^{(k)},\boldsymbol{F}_2^{(k)},\boldsymbol{F}_3^{(k)},\boldsymbol{F}_4^{(k)})$, для оценки качества рассматриваемого процесса управления бизнес-процессами введем в рассмотрение скалярную целевую функцию $\boldsymbol{\Phi}^{(k)}(z^{(k)}=(x^{(k)},y^{(k)}))$, значения которой для всех допустимых наборов $z^{(k)}=(x^{(k)},y^{(k)})\in\boldsymbol{XY}_k\subset\mathbf{R}^{(n\times m_k)}$ определяются в соответствии с (3) следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(k)}(z^{(k)}=(x^{(k)},y^{(k)}))=\sum_{k=1}^{4}\mu_k\cdot\boldsymbol{F}_i^{(k)}(z^{(k)})=\sum_{i=1}^{4}\mu_i\cdot f_i^{(k)}(x^{(k)},y^{(k)}),$$

$$\forall i\in\overline{1,4}:\ \mu_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{4}\mu_i=1. \tag{4}$$

Отметим, что целевая функция (функционал) $\boldsymbol{\Phi}^{(k)}(z^{(k)})$ является линейной скалярной сверткой векторного функционала $\boldsymbol{F}^{(k)}=(\boldsymbol{F}_1^{(k)},\boldsymbol{F}_2^{(k)},\boldsymbol{F}_3^{(k)},\boldsymbol{F}_4^{(k)})$, т. е. она формируется в соответствии с методом обобщенного критерия (скаляризации) векторных целевых функций (см., например, [4]), с неотрицательными весовыми коэффициентами $\mu_i,\ i\in\overline{1,4}$, выбор которых является достаточно сложной самостоятельной задачей, и они могут определяться, например, экспертным путем или на основании знания статистической информации об истории реализации основных параметров рассматриваемого производственного процесса.

Тогда на основании изложенного выше можно сформулировать с позиции ЛПР его цель в *многокритериальной задаче оптимизации управления бизнес-процессами производственного предприятия* для системы (1)–(4) следующим образом.

Будем считать, что ЛПР заинтересовано в таком исходе управления бизнес-процессами в системе (1) – (4) путем влияния на них возможным выбором допустимых вариантов реализации бизнес-процессов $\boldsymbol{B}_k\in\boldsymbol{B}_K,\ k\in\overline{1,K}$ и выбором допустимого набора $z^{(k)}=(x^{(k)},y^{(k)})\in\boldsymbol{XY}_k\subset\mathbf{R}^{(n\times m_k)}$, при котором функционал $\boldsymbol{\Phi}^{(k)}(z^{(k)})$, определенный соотношением (4), принимает наименьшее возможное значение.

Достижение этой цели ЛПР для рассматриваемой экономико-математической модели (1) – (4) реализуется в рамках решения следующей оптимизационной задачи.

Задача 1. Для имеющегося множества $\boldsymbol{B}_K=\{\boldsymbol{B}_k\}_{k\in\overline{1,K}}$ допустимых вариантов реализации бизнес-процессов производственного предприятия, описываемых системой (1)–(2), требуется найти *оптимальный вариант бизнес-процессов* $\boldsymbol{B}_{k_{opt}}=\boldsymbol{B}_k\in\boldsymbol{B}_K\ (k=k_{opt}\in\overline{1,K})$ и множество $\boldsymbol{Z}^{(e,k_{opt})}\subseteq\boldsymbol{XY}_{k_{opt}}\ (k_{opt}\in\overline{1,K})$ всех пар $z^{(e,k_{opt})}=(x^{(e,k_{opt})},y^{(e,k_{opt})})=(x_1^{(e,k_{opt})},x_2^{(e,k_{opt})},\ldots,x_n^{(e,k_{opt})},\ y_1^{(e,k_{opt})},y_2^{(e,k_{opt})},\ldots,y_{m_{k_{opt}}}^{(e,k_{opt})})\in\boldsymbol{XY}_{k_{opt}}$, которое является *множеством оптимальных планов производства* и на основании (1)–(4) определяются соотношениями:

$$(\boldsymbol{Z}^{(e,k_{opt})},\boldsymbol{B}_{k_{opt}})=\{(z^{(e,k_{opt})},k_{opt}):z^{(e,k_{opt})}=(x^{(e,k_{opt})},y^{(e,k_{opt})})\in \boldsymbol{XY}_{k_{opt}},\ k_{opt}\in\overline{1,K},$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(k_{opt})}(z^{(e,k_{opt})}=(x^{(e,k_{opt})},y^{(e,k_{opt})}))=\sum_{i=1}^{4}\mu_i\boldsymbol{F}^{(e,k_{opt})}(z^{(e,k_{opt})})=$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\mu_i f^{(e,k_{opt})}((x^{(e,k_{opt})},y^{(e,k_{opt})}))=$$

$$=\min_{z^{(k_{opt})}=(x^{(k_{opt})},y^{(k_{opt})})\in \boldsymbol{XY}_{k_{opt}}}\boldsymbol{\Phi}^{(k_{opt})}(z^{(k_{opt})}=(x^{(k_{opt})},y^{(k_{opt})}))=$$

$$=\min_{z^{(k_{opt})}\in \boldsymbol{XY}_{k_{opt}}}\sum_{i=1}^{4}\mu_i\boldsymbol{F}^{(k_{opt})}(z^{(k_{opt})})=$$

$$\min_{(x^{(k_{opt})},y^{(k_{opt})})\in \boldsymbol{XY}_{k_{opt}}}\sum_{i=1}^{4}\mu_i f^{(k_{opt})}((x^{(k_{opt})},y^{(k_{opt})}))=$$

$$=\min_{k\in\overline{1,K}}\min_{z^{(k)}=(x^{(k)},y^{(k)})\in \boldsymbol{XY}_k}\boldsymbol{\Phi}^{(k)}(z^{(k)}=(x^{(k)},y^{(k)}))=$$

$$=\min_{k\in\overline{1,K}}\min_{z^{(k)}\in \boldsymbol{XY}_k}\sum_{i=1}^{4}\mu_i\boldsymbol{F}^{(k)}(z^{(k)})=\min_{k\in\overline{1,K}}\min_{(x^{(k)},y^{(k)})\in \boldsymbol{XY}_k}\sum_{i=1}^{4}\mu_i f^{(k)}((x^{(k)},y^{(k)}))=$$

$$=c^{(e)}(\boldsymbol{B}_K),\ (\boldsymbol{Z}^{(e,k_{opt})},\boldsymbol{B}^{(k_{opt})}),\ \boldsymbol{Z}^{(e,k_{opt})}=\{z^{(e,k_{opt})}\}=\{(x^{(e,k_{opt})},y^{(e,k_{opt})})\},$$

$$\boldsymbol{B}_{k_{opt}}=\boldsymbol{B}_k\in\boldsymbol{B}_K\ \ (k=k_{opt}\in\overline{1,K})\}. \qquad (5)$$

Здесь функционал $\boldsymbol{\Phi}^{(k)}(z^{(k)})$ определен соотношениями (3), (4).

Число $c^{(e)}(\boldsymbol{B}_K)$ будем называть *оптимальным результатом* для *многокритериальной задачи оптимизации управления бизнес-процессами производственного предприятия*, описываемой экономико-математической моделью (1)–(5).

Отметим, что, учитывая конечность множества $\boldsymbol{B}_K=\{\boldsymbol{B}_k\}_{k\in\overline{1,K}}$, *решение задачи 1 существует и сводится к решению конечного числа задач линейного математического программирования*.

Для решения задачи 1 в данной работе предлагается методика, которая сводится к *решению конечного числа задач дискретной оптимизации и линейного математического программирования* [2; 3].

В заключение отметим, что предлагаемая экономико-математическая модель (1)–(5) *многокритериальной оптимизации управления бизнес-процессами производственного предприятия* позволяет реализовать проведение оптимизационных расчетов по нахождению оптимального варианта реализации бизнес-процессов предприятия и находить соответствующий ему *оптимальный план производства*. На основе предлагаемой экономико-математической модели и методики решения рассматриваемой задачи 1 можно разрабатывать компьютерные информационные системы поддержки принятия управленческих решений, которые будут способствовать повышению экономической эффективности деятельности производственных предприятий.

Литература

1. Репин В. В. Бизнес-процессы. Моделирование, внедрение, управление. – М. : Манн, Иванов и Фербер, 2013.

2. Шориков А. Ф., Виноградова Е. Ю. Динамическая оптимизация комплексного управления технологическими процессами на предприятии // Известия Уральского гос. экон. ун-та. – 2007. – № 1 (18). – С. 254–266.

3. Шориков А. Ф., Рассадина Е. С. Многокритериальная оптимизация формирования ассортимента продукции предприятия // Региональная экономика : научный информационно-аналитический экономический журнал РАН. – 2010. – № 2 (22). – С. 189–196.

4. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М. : Наука : Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

5. Математические методы и модели исследования операций : учебник для студентов вузов / под ред. В. А. Колемаева. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2008.

6. Орлов А. И. Теория принятия решений : учеб. пособие. – М. : Март, 2004.

Olga Vladimirovna Piksaikina,
Candidate of Economics, Deputy Dean of Business
and Management Department, Liberal Arts University –
University for Humanities (Ekaterinburg)
Elena Alekseevna Khodeneva,
Post-graduate Student, Liberal Arts University –
University for Humanities (Ekaterinburg)

Economic-Mathematical Model of Management Optimization of Industrial Enterprise's Business Processes

This article examines the economic-mathematical model of optimization of management of business processes. The multicriteria problem is solved using a vector and the problem of linear mathematical programming is formed. For the solution of multicriteria optimization problem the authors use the method of generalized criterion (the method of scalarization). Based on the results of the solution of the problem they intend to obtain the maximum sales volumes; maximum profit; minimum cost; minimum intensity of manufacturing products.

Key words: optimization; multicriteria mathematical model; business processes; product range; technology.