Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 2 (41). С. 31–36.
Bulletin of Liberal Arts University. 2023. No. 2 (41). P. 31–36.

УДК 656.02:514.1
doi:10.35853/vestnik.gu.2023.2(41).03

Применение множеств симметрии в задачах транспортной логистики

Павел Дмитриевич Лебедев
ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия,
pleb@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
Александр Александрович Успенский
ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
АНО ВО Гуманитарный университет, Екатеринбург, Россия,
uspen@imm.uram.ru, https://orcid.org/0000-0003-0725-4233

Аннотация. Исследуется задача о построении оптимального маршрута на плоскости, который ведет от текущей точки до ближайшего объекта инфраструктуры, например склада, магазина или центра технического обслуживания. Предложены алгоритмы сегментации плоскости на зоны влияния каждого объекта. Выделено характеристическое множество – биссектриса, разграничивающая эти зоны. Получены необходимые условия того, что отрезок является оптимальной траекторией, ведущей к ближайшему объекту. Найдены условия гладкости биссектрисы. Приведен пример построения логистических зон для нескольких объектов и построена функция расстояния до них, определяющая затраты на их достижение.

Ключевые слова: логистические зоны, оптимальная траектория, сегментация плоскости, евклидово расстояние, множество симметрии, биссектриса

Для цитирования: Лебедев П. Д., Успенский А. А. Применение множеств симметрии в задачах транспортной логистики // Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 2 (41). С. 31–36. DOI 10.35853/vestnik.gu.2023.2(41).03.

The Application of Symmetry Sets in Problems of Transport Logistics

Pavel D. Lebedev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS);
Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin,
Yekaterinburg, Russia, pleb@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
Alexander A. Uspenskii
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS);
Liberal Arts University – University for Humanities, Yekaterinburg, Russia,
uspen@imm.uram.ru, https://orcid.org/0000-0003-0725-4233

Abstract. The paper studies the problem of constructing an optimal route on a plane that leads from the current point to the nearest infrastructure objects, such as a warehouse, store or technical service center. The authors proposed algorithms for segmenting the plane into zones of influence for each object and singled out the characteristic set – the bisector, which delimits these zones. They also found the necessary conditions for a segment to be an optimal trajectory leading to the nearest object and the conditions for the smoothness of the bisector. The paper provides an example of building logistic zones for several objects. Also, a function of distance to them is built, which sets the costs for reaching them.

Keywords: logistic zones, optimal trajectory, plane segmentation, Euclidean distance, symmetry set, bisector

Введение

При заданной сети объектов массового обслуживания [Гаджинский 2005; Миротин, Бульба, Демин 2009] часто требуется для произвольной точки на местности построить оптимальный маршрут до одного из объектов. В качестве критерия оптимальности логично выбрать близость точки к объекту из сети (можно считать, что стоимость транспортировки товара или техники прямо пропорциональна длине пути). При этом можно считать, что требуется найти отрезок минимальной длины, соединяющий точку с объектом [Десятов 1989]. Сформулируем задачу на языке математических конструкций.

Постановка задачи и методы решения

Ограничимся рассмотрением случая, когда все объекты представляют собой выпуклые компакты M_i, $i = 1, \ldots, n$. Данное предположение обусловлено принятыми допущениями о форме большинства зданий и передвижных объектов на базе автомобилей. Полагаем, что длина пути прямо пропорциональна евклидовому расстоянию до объекта. Заметим, что большинство маршрутов должно начинаться и заканчиваться в одной точке. В случае однородного поля маршруты обычно делают маятниковые, то есть путь в одну сторону совпадает с путем в обратную. Поэтому стоимость транспортировки можно считать равной длине пути, умноженной на цену перевозки за единицу длины. Математически стоимость можно представить как произведение евклидового расстояния до объекта на постоянный коэффициент.

Задача. Пусть заданы n компактных выпуклых множеств M_i, $i = 1, \ldots, n$. Требуется построить функцию евклидового расстояния от точки $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ до их объединения и выделить подмножества плоскости, для которых ближайшим является один из компактов.

Следует подчеркнуть, что функция евклидова расстояния до множества в общем случае не является дифференцируемой и ее построение как в аналитической форме, так и приближенными методами представляет непростую задачу. Тем более рассматриваемая задача становится нетривиальной проблемой, когда множество является несвязным. Именно такой случай анализируется в работе. Множество, до которого ищется евклидово расстояние, представляет собой конечную совокупность, вообще говоря, непересекающихся множеств.

Обозначим через $\Omega_M(\mathbf{x})$ множество всех ближайших в евклидовой метрике точек множества M к точке $\mathbf{x}$. Если множество M выпукло, то у каждой точки $\mathbf{x} \in M$ ближайший элемент на каждом из компактов M_i, $i = 1, \ldots, n$ единственен [Лейхтвейс 1985]. Обозначим $\mathbf{x}^{(i)}$ ближайшую в евклидовой метрике к $\mathbf{x}$ точку фигуры M_i.

Определение 1. Пусть задано замкнутое множество $\text{M} \subset \mathbf{R}^2$. Биссектрисой $L(M)$ [Лебедев, Успенский 2009] множества M называется

$$L(M) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \exists \mathbf{m}_1 \in \Omega_M(\mathbf{x}), \exists \mathbf{m}_2 \in \Omega_M(\mathbf{x}) (\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{m}_2)\}.$$

Обозначим $\breve{M} = \bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} M_i$. Поскольку множество $\breve{M}$ не выпуклое (более того, не односвязное), то $L(\breve{M}) \neq \varnothing$. Биссектриса является частным случаем множества симметрии. В качестве примера другого множества симметрии можно указать «скелет» плоской фигуры [Местецкий 2009]. В англоязычной литературе для случая построения границ между зонами влияния выпуклых фигур множество, аналогичное биссектрисе, называется “conflict set” (см. [Siersma 1999]).

Теорема 1. Для произвольной точки $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ и числа j, $1 \leq j \leq n$ множество M_j является ближайшим среди всех M_i, $i = 1, \ldots, n$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$\left[\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}\right]\bigcap L(\breve{M})\subseteq\{\mathbf{x}\}. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим

$$D_j=\left\{\mathbf{z}\in\mathbf{R}\ :\rho(\mathbf{z},M)=\rho(\mathbf{z},M_j)\right\},$$

где $\rho(\mathbf{z},M)=\min\limits_{\mathbf{m}\in M}\left\|\mathbf{z}-\mathbf{m}\right\|$ – евклидово расстояние от точки $\mathbf{z}$ до M. Поскольку M_i – выпуклые компакты, то множество $L(\breve{M})$ состоит из точек, равноудаленных от двух или более ближайших компактов из набора M_1, M_2, …, M_n. Следовательно, $\partial D_j\subseteq L(\breve{M})$, здесь символ ∂ означает границу множества.

Если условие (1) выполняется, то это означает, что отрезок $[\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}]$ либо не пересекается с границей зоны D_j, либо имеет с ней только одну общую точку на ∂D_j. В обоих случаях это означает выполнение $[\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}]\subset D_j$. С другой стороны, если найдётся точка $\mathbf{x}^*\in\left[\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}\right]\cap L(\breve{M}),\mathbf{x}^*\neq\mathbf{x}$ то выполняется условие: $\exists\mathbf{x}^{(k)}:\mathbf{x}^{(k)}\in\Omega_{\breve{M}}\left(\mathbf{x}^*\right)$, $k\neq j$. Из определения ближайшей точки следует неравенство

$$\left\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}^{(k)}\right\|\leq\left\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}^{(j)}\right\|.$$

Тогда согласно неравенству треугольника

$$\left\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}^{(k)}\right\|<\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right\|+\left\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}^{(k)}\right\|\leq\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right\|+\left\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}^{(j)}\right\|=\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(j)}\right\|.$$

Поэтому $\mathbf{x}^{(j)}\notin\Omega_{\breve{M}}(\mathbf{x})$. Получилось противоречие. Теорема доказана.

Смысл теоремы заключается в том, если точка $\mathbf{x}^{(j)}$ является ближайшей к $\mathbf{x}$, то отрезок $\left[\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}\right]$ либо не пересекается с биссектрисой множества $\breve{M}$, либо имеет только одну общую точку $\mathbf{x}$.

Теорема 2. Пусть известна точка биссектрисы $\mathbf{x}\in L(\breve{M})$. Если множество $\Omega_{\breve{M}}(\mathbf{x})$ состоит ровно из двух элементов $\Omega_{\breve{M}}(\mathbf{x})=\left\{\mathbf{x}^{(j)},\mathbf{x}^{(k)}\right\}$, то к $L(\breve{M})$ в точке $\mathbf{x}$ определена касательная

$$\Pi=\left\{\mathbf{p}\in\mathbf{R}^2:\left\|\mathbf{p}-\mathbf{x}^{(j)}\right\|=\left\|\mathbf{p}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|\right\}. \qquad (2)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3 из [Лебедев, Успенский 2020].

Для решения задач построения оптимального маршрута модернизирован разработанный в среде MATLAB программный комплекс [Лебедев, Успенский 2017]. Он использует процедуры построения волновых фронтов, биссектрис и оптимальных траекторий для плоских фигур с параметрически заданной границей, предложенные в [Лебедев, Успенский 2019; Лебедев, Успенский 2021].

Пример решения задачи

В качестве множеств M_i, $i=1$, …, 3 рассматриваются эллипсы:

$$M_1=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\frac{(x+1)^2}{0{,}8^2}+\frac{y^2}{0{,}4^2}\leq 1\right\},$$

$$M_2=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\frac{(x-1)^2}{0{,}5^2}+\frac{(y-0{,}5)^2}{0{,}6^2}\leq 1\right\},$$

$$M_3=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\frac{(x+0{,}5)^2}{0{,}7^2}+\frac{(y-1{,}5)^2}{0{,}5^2}\leq 1\right\}.$$

Требуется найти аппроксимацию функции евклидового расстояния до ближайшего из множеств в виде карты линий уровня и графика, выделив ее сингулярное множество (то есть биссектрису), а также определить зоны влияния каждого из компактов M_i, $i = 1, \ldots, 3$.

Сингулярное множество $L(M)$, где $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, состоит из трех гладких кривых, для точек каждой из которых выполняются условия теоремы 2. Кривые стыкуются в точке бифуркации (0,004; 0,511), особенность которой заключается в том, что у нее не 2, а 3 ближайшие точки на множестве M.

Решение задачи было найдено путем моделирования распространения волновых фронтов. Границы компактов M_i, множество симметрии $L(M)$ и линии уровня с шагом 0,1 функции евклидового расстояния $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ от точки $\mathbf{x} = (x, y)$ до M показаны на рис. 1. Логистическая зона D_i, $i = 1, \ldots, 3$ каждого из компактов ограничена ветвями сингулярного множества.

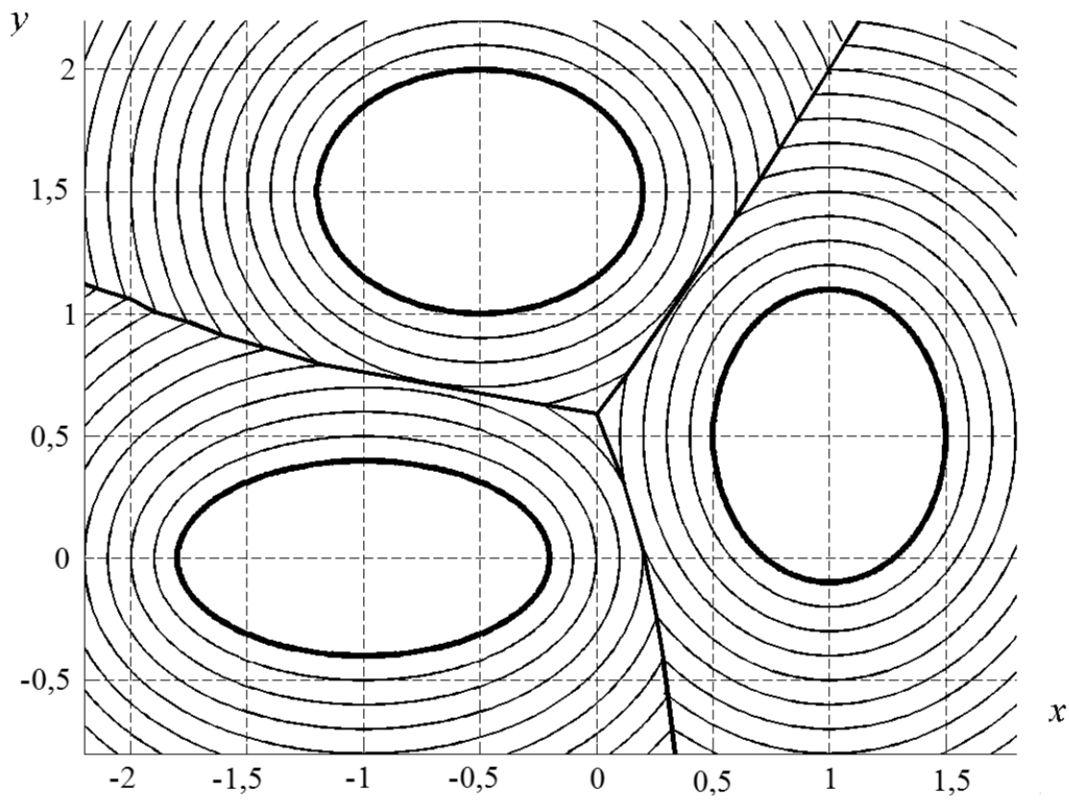

Рис. 1. Компакты M_i, $i = 1, \ldots, 3$ (их граница обозначена жирными кривыми) множество симметрии $L(M)$ (полужирная кривая) и линии уровня функции $u(\mathbf{x})$ с шагом 0,1 (тонкие кривые) (выполнено авторами с использованием программного комплекса [10])

График функции $u(x, y)$ показан на рис. 2 на прямоугольной решётке с ячейкой 0,1×0,1. Рисунок демонстрирует, что функция $u(x, y)$ теряет гладкость в точках $L(M)$. Кроме того, он иллюстрирует, что оптимальные траектории, которые идут от точки плоскости, не лежащей на биссектрисе, до ближайшего компакта M_i, не пересекают биссектрису, что подтверждает включение (1). Сама биссектриса является всюду, за исключением точки бифуркации, гладкой кривой, касательная П к которой определена формулой (2).

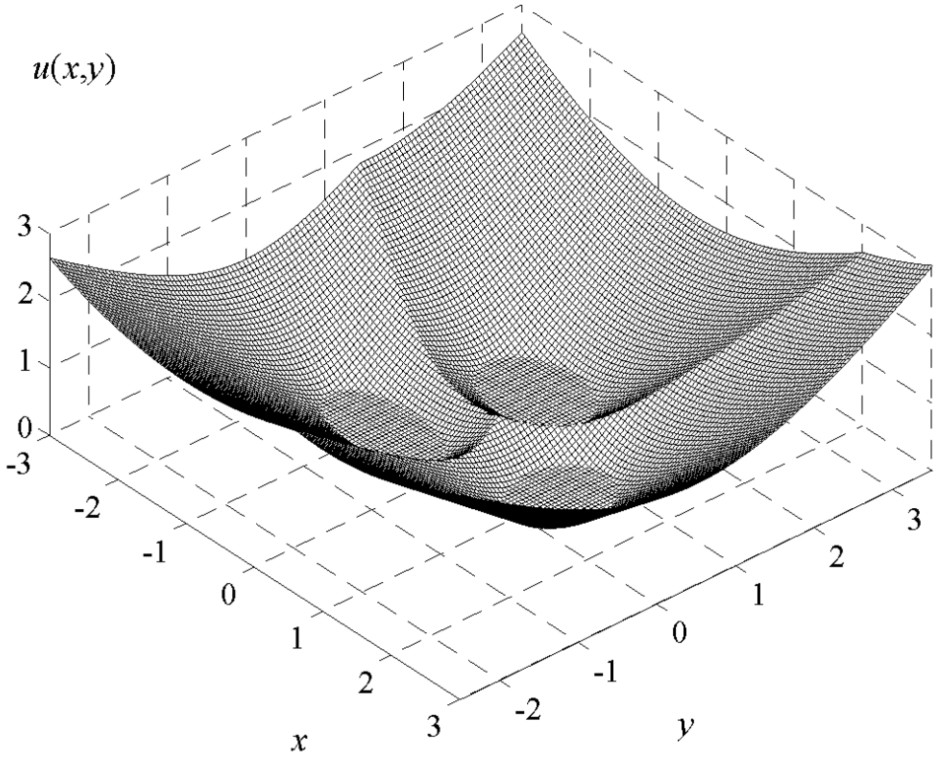

Рис. 2. График функции u(x, y) на прямоугольной решётке с ячейкой 0,1×0,1 (выполнено авторами с использованием программного комплекса [10])

Заключение

Разработанные алгоритмы предназначены для решения задач логистики и оптимизации транспортных маршрутов. При заданной сети объектов, например магазинов, складов или пунктов технического обслуживания, алгоритмы позволяют строить зоны действия объектов и выделять для потребителей оптимальные траектории. На основе предложенных процедур строится график функции расстояния до ближайшего из объектов, которую можно считать пропорциональной стоимости транспортировки продукции до него. Ключевым элементом решения служит построение биссектрисы – частного случая множества симметрии для несвязной фигуры, состоящей из объединения конечного числа объектов.

Список источников

1. Гаджинский А. М. Логистика. 12-е изд., перераб. и доп. М. : Дашков и К, 2005. 484 с.

2. Десятов В. Г. Проектирование систем объектов общественного комплекса промышленных предприятий : учеб. пособие. М. : МАРХИ. 1989. 78 с.

3. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Конструирование негладкого решения задачи управления по быстродействию при низком порядке гладкости границы целевого множества // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 108–119. DOI 10.21538/0134-4889-2019-25-1-108-119.

4. Лебедев П. Д., Успенский А. А. О структуре сингулярности минимаксного решения задачи Дирихле для уравнения типа эйконала при нарушении гладкости кривизны границы краевого множества // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 3. С. 129–154.

5. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Построение рассеивающих кривых в одном классе задач быстродействия при скачках кривизны границы целевого множества // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 93–112. DOI 10.35634/2226-3594-2020-55-07.

6. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.

7. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / пер. с нем. В. А. Залгаллера, Т. В. Хачатуровой. М. : Наука, 1985. 335 с.

8. Местецкий Л. М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М. : Физматлит, 2009. 288 с.

9. Миротин Л. Б., Бульба А. В., Демин В. А. Логистика, технология, проектирование складов, транспортных узлов и терминалов. Ростов н/Д : Феникс, 2009. 409 с.

10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017662074 Российская Федерация. Программа построения волновых фронтов и функции евклидова расстояния до компактного невыпуклого множества : № 2017662074 : заявл. 06.07.2017 : опубл. 27.10.2017 / Лебедев П. Д., Успенский А. А.; правообладатель ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН). – 1 с.

11. Siersma D. Properties of Conflict Sets in the Plane // Geometry and topology of caustics – Caustics'98 (Warsaw). Banach Center Publication. Vol. 50. Warsaw : Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, 1999. P. 267–276. DOI 10.4064/-50-1-267-276.

Информация об авторах

Павел Дмитриевич Лебедев, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина (Екатеринбург, Россия).

Александр Александрович Успенский, д-р физ.-мат. наук, заведующий сектором ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; доцент АНО ВО «Гуманитарный университет» (Екатеринбург, Россия).

Information about the authors

Pavel D. Lebedev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin (Yekaterinburg, Russia).

Alexander A. Uspenskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Head of sector, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Assoc. prof., Liberal Arts University – University for Humanities (Yekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию | The article was submitted 13.03.2023.
Одобрена после рецензирования | Approved after reviewing 05.04.2023.