Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 3 (42). С. 7–16.
Bulletin of Liberal Arts University. 2023. No. 3 (42). P. 7–16.

ЭКОНОМИКА | ECONOMICS

УДК 330.46:517.977
doi:10.35853/vestnik.gu.2023.3(42).01
5.2.3

Гарантирующие стратегии управления и динамика наилучших ответов в игровых инвестиционных моделях

Николай Андреевич Красовский
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия, nkrasovskiy@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4313-0799
Александр Михайлович Тарасьев
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
АНО ВО «Гуманитарный университет», Екатеринбург, Россия,
tam@imm.uran.ru, https://orcid.org/0000-0002-8366-9628

Аннотация. Работа посвящена анализу поведения равновесных траекторий в динамических биматричных играх, имеющих приложения для моделирования инвестиционных процессов. Рассматривается система дифференциальных уравнений, которая описывает эволюционную динамику поведения двух игроков на бесконечном горизонте времени. На первом шаге исследуются конструкции динамического равновесия по Нэшу, основанные на идее гарантирующих стратегий в смысле Н. Н. Красовского. Такие стратегии учитывают долгосрочные интересы игроков. На втором шаге рассматривается динамика наилучших ответов игроков, учитывающая краткосрочные интересы. В этом случае равновесная траектория сходится к точке статического равновесия по Нэшу. В качестве примера рассматривается модель биматричной игры на финансовом рынке, при которой игроками являются коалиции трейдеров (быки и медведи), имеющие две инвестиционные стратегии (вложение средств либо в акции, либо в облигации). На третьем шаге исследуется так называемая «смешанная» динамика, при которой первый игрок использует гарантирующие стратегии, а второй игрок руководствуется стратегией динамики наилучших ответов. Для всех трех случаев строятся равновесные траектории и проводится сравнение значений функционалов выигрышей игроков в точках равновесия. Показано, что значение выигрышей траектории динамического равновесия по Нэшу лучше, чем свойства траектории динамики наилучших ответов. Также показано, что качественные характеристики в точке окончания движения равновесных траектории «смешанной» динамики доминируют над первыми двумя случаями.

Ключевые слова: динамические биматричные игры, гарантирующие стратегии управления, динамика наилучших ответов, равновесные траектории, динамические игровые модели инвестиций

Для цитирования: Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Гарантирующие стратегии управления и динамика наилучших ответов в игровых инвестиционных моделях // Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 3 (42). С. 7–16. DOI 10.35853/vestnik.gu.2023.3(42).01.

Guaranteeing Control Strategies and Best Response Dynamics in Game Investments Models

Nikolay A. Krasovskii
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia, nkrasovskiy@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4313-0799
Alexander M. Tarasyev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Liberal Arts University – University for Humanities, Yekaterinburg, Russia, tam@imm.uran.ru, https://orcid.org/0000-0002-8366-9628

Abstract. The paper analyzes the behaviour of equilibrium trajectories in dynamic bimatrix games that have applications for modelling investment processes. The authors consider a system of differential equations that describes the evolutionary dynamics of the behavior of two players on an infinite time horizon. First, based on the idea of guaranteeing strategies in the sense of N.N. Krasovskii, we study the constructions of dynamic Nash equilibrium. Such strategies take into account the long-term interests of players. At the second step, the dynamics of the players' best replies is considered, taking into account short-term interests. In this case, the equilibrium trajectory converges to the point of static Nash equilibrium. As an example, we consider a model of a bimatrix game on the financial market, in which players are coalitions of traders (bulls and bears) with two investment strategies (investing in either stocks or bonds). At the third step, the so-called "mixed" dynamics is investigated, in which the first player uses guaranteeing strategies, and the second player is guided by the strategy of best reply dynamics. For all three cases, equilibrium trajectories are constructed and the values of payoff functionals of the players at the equilibrium points are compared. The findings show that the value of payoffs on the trajectory of dynamic Nash equilibrium is better than the properties of the trajectory of best reply dynamics. It is also demonstrated that the quality indices at the finite point of the movement for equilibrium trajectories of "mixed" dynamics dominate over the first two cases.

Keywords: dynamic bimatrix games, guaranteeing control strategies, best reply dynamics, equilibrium trajectories, dynamic investments game models

Введение

В работе проводится анализ поведения равновесных траекторий в динамических биматричных играх на бесконечном горизонте времени [Воробьев 1985; Basar, Olsder 1991]. Такой анализ может быть использован для моделирования инвестиционных процессов, в частности игры́ на финансовых рынках.

В первой части статьи рассматривается эволюционная игра двух участников [Friedman 1991; Hofbauer, Sigmund 1988], динамика которой описывается системой дифференциальных уравнений [Колмогоров 1938; Кряжимский, Осипов 1995]. Решение задачи основано на конструкциях из теории оптимального управления [Понтрягин, Болтянский, Гамкрелидзе, Мищенко 1961] и дифференциальных игр с использованием гарантирующих стратегий, предложенных академиком Н. Н. Красовским [Красовский 1985; Krasovskii, Krasovskii 1995; Krasovskii, Subbotin 1988]. Вводится понятие динамического равновесия по Нэшу [Клейменов 1993], строится функция цены, позиционные стратегии и линии переключения для равновесных траекторий [Субботин, Тарасьев 1985; Красовский, Тарасьев 2016].

Во второй части исследования проводится анализ поведения равновесной траектории для динамики наилучших ответов игроков (аналогично модели Курно) [Intriligator 1971]. При таком подходе равновесная траектория сходится к точке статического равновесия по Нэшу, а сам подход учитывает лишь краткосрочные интересы игроков.

В качестве примера рассматривается игровая модель, описывающая поведение игроков (быки и медведи) на финансовом рынке акций и облигаций. Для такой игры проведен анализ доходности инвестиций в виде процентных ставок, основанный на реальных данных. Приведено сравнение значений функционалов выигрышей игроков в точках окончания равновесных траекторий.

В третьей части приводится пример так называемой «смешанной» динамики, в которой первый игрок использует гарантирующие стратегии, а второй игрок руководствуется динамикой наилучших ответов. Показано, что качественные характеристики в точке окончания движения равновесных траектории «смешанной» динамики доминируют над первыми двумя случаями.

В Заключении отмечено, что гарантирующие стратегии, имеющие предвидящий (долгосрочный) характер, обладают свойствами, лучшими по сравнению с динамикой наилучших ответов игроков, которые учитывают краткосрочные интересы игроков. «Смешанная» динамика также наглядно демонстрирует превосходство гарантирующих стратегий над стратегиями динамики наилучших ответов.

Эволюционная игра

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую динамику поведения двух игроков на рынке акций и облигаций:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \;\; x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = -y(t) + v(t), \;\; y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

Здесь параметры x, $0 \le x \le 1$ и y, $0 \le y \le 1$ определяют вероятности того, как игроки придерживаются выбранных стратегий.

Управляющие параметры u и v удовлетворяют условиям $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$ и являются сигналами, рекомендующими смену стратегий игроками. Например, значение $u = 0$ ($v = 0$) соответствует сигналу: «сменить первую стратегию на вторую». Значение $u = 1$ ($v = 1$) соответствует сигналу: «сменить вторую стратегию на первую». Значение $u = x$ ($v = y$) соответствует сигналу: «сохранять предыдущую стратегию». В частности, в игре, моделирующей инвестиционный процесс, управляющие сигналы u, v задают движение средств из одного рынка в другой.

Терминальные функционалы качества определяются как математическое ожидание выигрышей, задаваемых соответствующими матицами $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $i, j = 1,2$ в биматричной игре, и могут быть интерпретированы как «локальные» интересы игроков:

$$g_A(x(T),y(T)) = C_A x(T)y(T) - \alpha_1 x(T) - \alpha_2 y(T) + a_{22}$$

в заданный момент времени T. Здесь параметры C_A, α_1, α_2 определяются в соответствии с классической теорией биматричных игр [Воробьев 1985; Basar, Olsder 1991]:

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22},$$
$$\alpha_1 = a_{22} - a_{12},$$
$$\alpha_2 = a_{22} - a_{21}.$$

Функционал качества g_B второго игрока определяется аналогично в соответствии с коэффициентами матрицы B.

«Глобальные» J_A^∞ интересы первого игрока определяются следующим образом:

$$J = \left[J_A^-, J_A^+\right],$$
$$J_A^- = \liminf_{t\to\infty} g_A(x(t), y(t)),$$
$$J_A^+ = \limsup_{t\to\infty} g_A(x(t), y(t)).$$

Интересы J_B^∞ второго игрока определяются аналогично.

Рассмотрим решение эволюционной игры на основе теории оптимального управления [Понтрягин, Болтянский, Гамкрелидзе, Мищенко 1961] и дифференциальных игр [Krasovskii, Subbotin 1988]. Следуя [Клейменов 1993], представим понятие динамического равновесия по Нэшу в классе позиционных стратегий (обратных связей) $U = u(t,x,y,\varepsilon)$, $V = v(t,x,y,\varepsilon)$.

Определение

Пусть $\varepsilon > 0$ *и* $(x_0,y_0) \in [0,1] \times [0,1]$. *Пара обратных связей* $U^0 = u^0(t,x,y,\varepsilon)$, $V^0 = v^0(t,x,y,\varepsilon)$ *называется равновесием по Нэшу для начального положения* (x_0,y_0), *если для любых других обратных связей* $U = u(t,x,y,\varepsilon)$, $V = v(t,x,y,\varepsilon)$ *соблюдается следующее условие: неравенства*

$$J_A^-\left(x^0(\cdot), y^0(\cdot)\right) \geq J_A^+\left(x_1(\cdot), y_1(\cdot)\right) - \varepsilon,$$
$$J_B^-\left(x^0(\cdot), y^0(\cdot)\right) \geq J_B^+\left(x_2(\cdot), y_2(\cdot)\right) - \varepsilon$$

выполняются для всех траекторий

$$(x^0(\cdot),y^0(\cdot)) \in X(x_0,y_0,U^0,V^0),$$
$$(x_1(\cdot),y_1(\cdot)) \in X(x_0,y_0,U,V^0),$$
$$(x_2(\cdot),y_2(\cdot)) \in X(x_0,y_0,U^0,V).$$

где символ X обозначает множество траекторий, которые стартуют из начальной позиции (x_0,y_0) *и генерируются соответствующими стратегиями* (U^0,V^0), (U,V^0), (U^0,V).

Динамическое равновесие по Нэшу может быть построено путем склейки «позитивных» обратных связей u_A^0, v_B^0 и «наказывающих» обратных связей u_B^0, v_A^0 в соответствии с соотношениями [Клейменов 1993]:

$$U^0 = u^0(t,x,y,\varepsilon) = \begin{cases} u_A^\varepsilon(t), \| (x,y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) \| < \varepsilon, \\ u_B^0(x,y), \quad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$V^0 = v^0(t,x,y,\varepsilon) = \begin{cases} v_B^\varepsilon(t), \| (x,y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) \| < \varepsilon, \\ v_A^0(x,y), \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция цены для «позитивных» обратных связей

Основное значение при построении динамического равновесия по Нэшу принадлежит «позитивным» обратным связям u_A^0, v_B^0, которые гарантированно максимизируют значения величин g_A, g_B на бесконечном горизонте времени $T \to \infty$. С этой целью строятся функции цены w_A, w_B в играх с нулевой суммой на бесконечном горизонте. Основываясь на методе обобщенных характеристик уравнений Гамильтона – Якоби, получим аналитическую структуру функции цены. В случае, когда $C_A > 0$ функция цены w_A определяется системой четырех функций:

$$w_A(x,y) = \psi_A^i(x,y), \qquad \text{если } (x,y) \in E_A^i, \quad i = 1,\ldots,4,$$

$$\psi_A^1(x,y) = a_{22} - \frac{(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2}{4C_A xy},$$

$$\psi_A^2(x,y) = a_{11} - \frac{((C_A - \alpha_1)(1-x) + (C_A - \alpha_2)(1-y))^2}{4C_A(1-x)(1-y)},$$

$$\psi_A^3(x,y) = C_A xy - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22},$$
$$\psi_A^4(x,y) = \frac{a_{22}C_A - \alpha_1\alpha_2}{C_A} = v_A.$$

Здесь v_A является ценой статической игры с матрицей A.

Показано, что функция цены w_A имеет свойства u-стабильности и v-стабильности [Krasovskii, Krasovskii 1995; Krasovskii, Subbotin 1988], что может быть выражено в виде сопряженных производных [Субботин, Тарасьев 1985]:

$$D_* w_A(x,y)|s \le H(x,y,s), \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1),$$
$$s = (s_1,s_2) \in R^2,$$
$$D^* w_A(x,y)|s \ge H(x,y,s), \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1),$$
$$w_A(\mathrm{x,y}) \le g_A(x,y), \quad \mathrm{s} = (s_1,s_2) \in R^2.$$

Здесь сопряженные производные $D_* w_A$ и $D^* w_A$ и Гамильтониан H определяются следующим образом:

$$D^* w_A(x,y)\,|\,s = \sup_{h\in R^2}\left(\langle s,h\rangle - \partial_- w_A(x,y)\,|\,(h)\right),$$
$$D_* w_A(x,y)\,|\,s = \inf_{h\in R^2}\left(\langle s,h\rangle - \partial_+ w_A(x,y)\,|\,(h)\right),$$
$$H(x,y,s) = -s_1 x - s_2 y + \max\{0,s_1\} + \max\{0,s_2\}.$$

На рис. 1 представлена структура функции цены w_1 в терминальной задаче для первого игрока. Для случая $x_A = \alpha_2/C_A = 0{,}6$, $y_A = \alpha_1/C_A = 0{,}4$, $e^{(T-t)} = 1{,}5$ показаны 5 областей D_k, $k = 1,...,5$, в которых функция цены описывается гладкими компонентами. Эти гладкие компоненты удовлетворяют уравнению Гамильтона – Якоби. На линиях L_m, $m = 1,...,4$ происходит непрерывная склейка гладких компонент. Эта склейка негладкая, поэтому на указанных линиях проверяются неравенства для сопряженных производных функции цены. Структура функции цены не является стационарной и зависит от времени окончания T.

Структура функции цены w_2 для второго игрока строится аналогично поворотом квадрата игры на 90°.

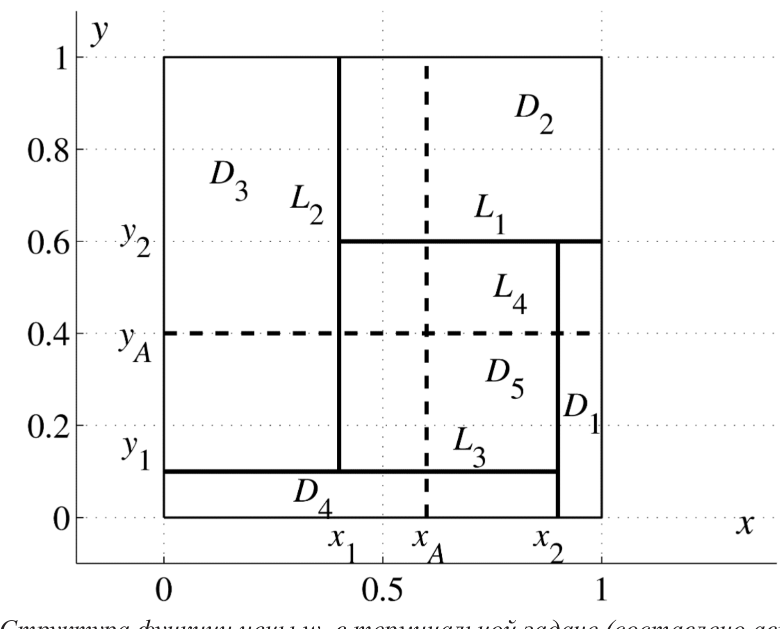

Рис. 1. Структура функции цены w_1 в терминальной задаче (составлено авторами)

Динамика наилучших ответов игроков

В этом разделе анализируется динамика наилучших ответов игроков для биматричной игры. Такая игровая динамика имеет такую же структуру, как динамика игры. Отличие данной конструкции в том, что линии переключения обеспечиваются краткосрочными интересами игроков, а именно функциями фитнеса $g_A(x,y)$ и $g_B(x,y)$. Это означает, что линии переключения для стратегий управления динамики наилучших ответов порождаются статическими приемлемыми ситуациями $x = x_B$, $y = y_A$, образующими точку статического равновесия по Нэшу $NE = (x_B,y_A)$. Отметим, что краткосрочные функции фитнеса игроков $g_A(x,y)$ и $g_B(x,y)$ существенно отличаются от долгосрочных интересов, представленных функциями цены $w_A(x,y)$ и $w_B(x,y)$.

Таким образом, динамика наилучших ответов игроков определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x + u, & x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = -y + v, & y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

где стратегии управления $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ заданы формулами:

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y_A \le y \le 1, \\ 0, \text{ если } 0 \le y \le y_A, \end{cases}$$

$$v(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 \le x \le x_B, \\ 0, \text{ если } x_B \le x \le 1. \end{cases}$$

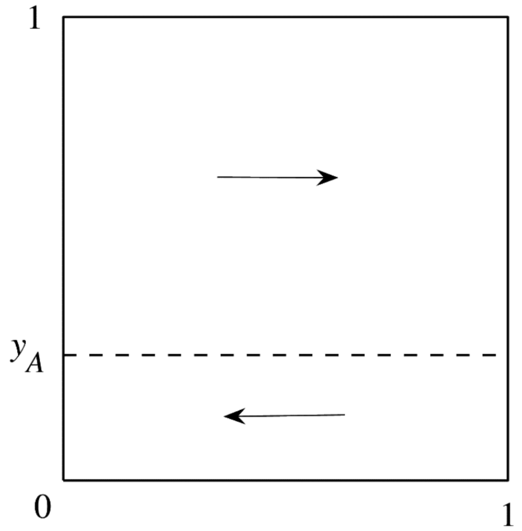

Рис. 2. Направления скоростей для первого игрока с краткосрочными интересами (составлено авторами)

На рис. 2 показаны направления скоростей для первого игрока с краткосрочными интересами (определяется функционалом выигрыша $g_A(x,y)$).

Модель

Для демонстрации поведения равновесных траекторий в динамических биматричных играх приведем следующие матрицы выигрышей двух игроков на финансовых рынках акций и облигаций. Эти матрицы отражают данные о рынках акций и облигаций в США [Wiltermuth 2023].

Матрица A соответствует поведению трейдеров, играющих на повышение курса и называемых быками. Матрица B соответствует поведению трейдеров, которые играют на снижении курса и называются медведями. Параметры матрицы означают доходность акций и облигаций, выраженную в виде процентных ставок.

Представим матрицы A и B и их основные «игровые» параметры:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1,73 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$C_A = 11,25,\ \alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 1,25,\ x_A = 0,11,\ y_A = 0,27,$$
$$C_B = -17,5,\ \beta_1 = -2,5,\ \beta_2 = -9,5,\ x_B = 0,54,\ y_B = 0,14.$$

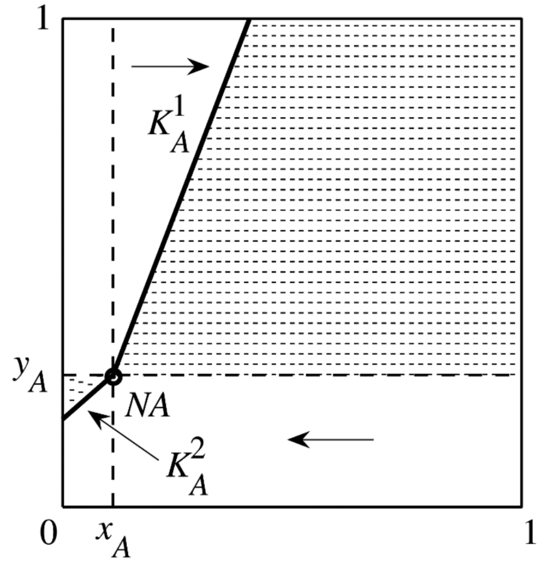

Рис. 3. Направление скоростей для первого игрока с долгосрочными интересами (составлено авторами)

На рис. 3 показаны линия переключения управлений первого игрока $K_A = K_A^1 \cup K_A^2$, а также направления скоростей для первого игрока с долгосрочными интересами (определяется глобальным предельным функционалом J_A^∞).

На рис. 4 представлены седловые точки S_A и S_B статической игры, точка статического равновесия по Нэшу NE, линии K_A и K_B, сгенерированные функциями цены w_A. Равновесные траектории T_1, T_2 и T_3, которые мы называем *траекториями динамического равновесия по Нэшу,* начинают свое движение из начальных точек IP_1, IP_2 и IP_3, затем проходят вдоль характеристик уравнений Гамильтона – Якоби, встречаются с линиями переключения, на которых возникает скользящий режим, и сходятся в точке динамического равновесия по Нэшу, которое мы называем *рыночным равновесием ME.*

На рис. 5 представлена равновесная траектория TR динамики наилучших ответов игроков. Она исходит из начальной точки IP, движется вдоль характеристик уравнений Гамильтона – Якоби, переключается от одной характеристики на другую на линиях переключения $x = x_B$, $y = y_A$ и оканчивается в точке статического равновесия по Нэшу NE.

Значения функционалов выигрышей игроков в точке рыночного равновесия ME равны следующим величинам в виде процентных ставок:

$$g_A(ME) = 2,68,\ g_B(ME) = 2,86.$$

Эти значения превосходят выигрыши игроков в точке статического равновесия по Нэшу:

$$g_A(NE) = 2,68,\ g_B(NE) = 1,86.$$

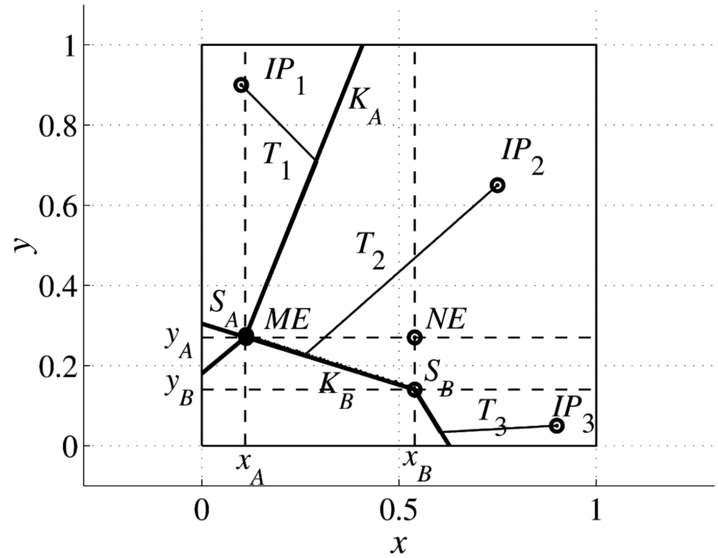

Рис. 4. Траектории динамического равновесия по Нэшу (составлено авторами)

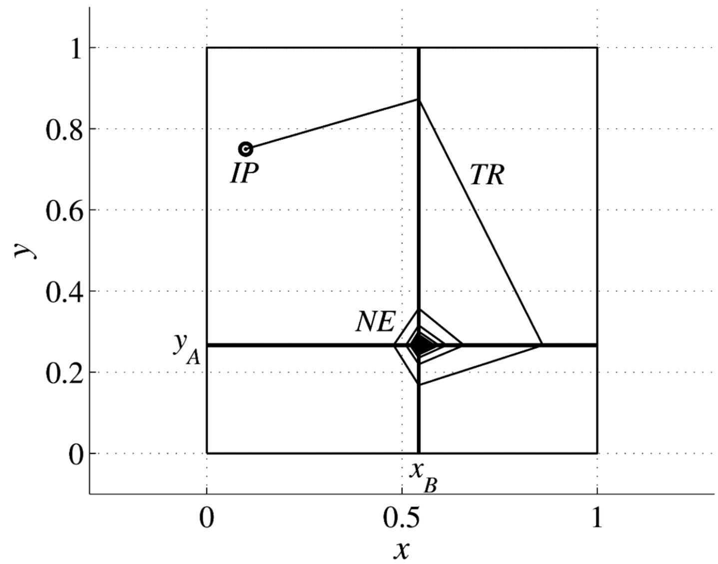

Рис. 5. Равновесная траектория динамики наилучших ответов игроков (составлено авторами)

«Смешанная» динамика

В этом разделе рассматривается так называемая «смешанная» динамика, в которой первый игрок использует гарантирующие стратегии, а стратегии второго игрока формируются функциями фитнеса $g_A(x,y)$ и $g_B(x,y)$. Это означает, что линии переключения для стратегий управления первого игрока определяются линиями переключения, генерируемые функцией цены, а линией переключения управлений второго игрока является линия $x = x_B$.

На рис. 6 представлены точка статического равновесия по Нэшу NE, линия переключения K_A управления первого игрока, сгенерированная функцией цены w_A, линия переключения $x = x_B$ управления второго игрока, сформированная динамикой наилучших ответов. Равновесные траектории «смешанной» динамики обозначены символами T_1, T_2 и T_3. Они начинают свое движение из начальных точек IP_1, IP_2 и IP_3, затем продолжают его вдоль характеристик уравнений Гамильтона – Якоби, встречаются с линиями переключения, на которых меняют свое поведение, и сходятся в конечной точке FP.

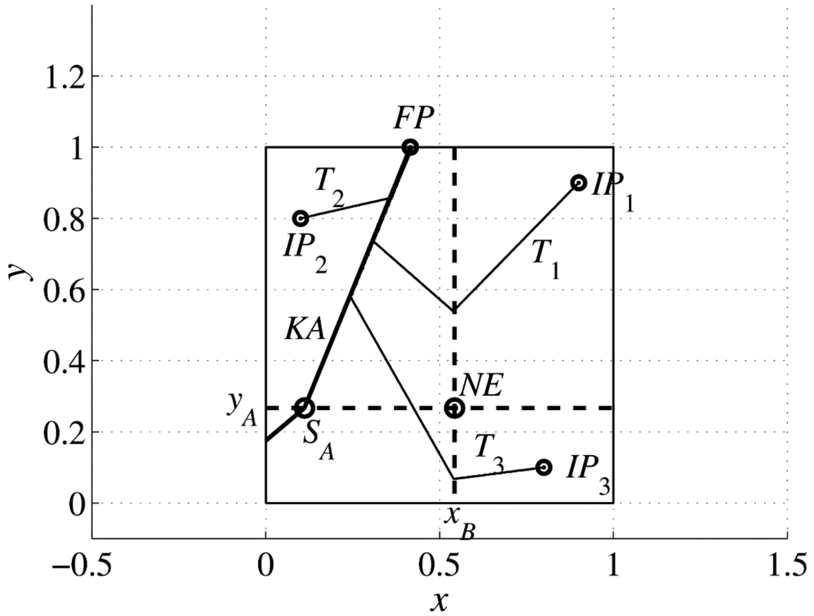

Рис. 6. Равновесные траектории «смешанной» динамики (составлено авторами)

Значения функционалов выигрышей игроков в точке *FP* окончания движения равновесных траекторий «смешанной» динамики равны следующим величинам в виде процентных ставок:

$$g_A(ME) = 5{,}29,\ g_B(ME) = 3{,}55.$$

Эти значения доминируют над величинами в точке окончания движения равновесных траекторий динамического равновесия по Нэшу и тем более над показателями качества равновесной траектории динамики наилучших ответов игроков.

Заключение

В качестве заключения можно отметить, что гарантирующие стратегии, имеющие предвидящий (долгосрочный) характер, обладают свойствами, превосходящими динамику наилучших ответов игроков, которые учитывают краткосрочные интересы игроков.

«Смешанная» динамика также наглядно демонстрирует превосходство гарантирующих стратегий над стратегиями динамики наилучших ответов.

Список источников

Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М. : Наука, 1985. 272 с.

Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург : Наука, 1993. 185 с.

Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи математических наук. 1938. Вып. 5. С. 5–41.

Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Равновесные траектории в динамических биматричных играх со среднеинтегральными функционалами выигрышей // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8, № 2. С. 58–90.

Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М. : Наука, 1985. 520 с.

Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О дифференциально-эволюционных играх // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения : сборник статей : к 70-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко / под ред. Р. В. Гамкрелидзе. М. : Наука : Физматлит, 1995. С. 257–287. (Труды Математического института им. В. А. Стеклова ; т. 211).

Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов : монография. М. : Физматлит, 1961. 391 с.

Субботин А. И., Тарасьев А. М., Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.
Basar T., Olsder G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory. London : Academic Press, 1982. 429 p.
Friedman D. Evolutionary Games in Economics // Econometrica. 1991. Vol. 59, no. 3. P. 637–666. DOI 10.2307/2938222.
Hofbauer J., Sigmund K. The Theory of Evolution and Dynamical Systems : Mathematical Aspects of Selection. Cambridge etc. : Cambridge University Press, 1988. 352 p.
Intriligator M. Mathematical Optimization and Economic Theory. New Jersey : Prentice-Hall, 1971. 508 p.
Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control Under Lack of Information. Boston etc. : Birkhauser, 1995. 322 p.
Krasovskii N. N., Subbotin A. I. Game-Theoretical Control Problems. New York : Springer, 1988. 517 p.
Wiltermuth J. Investors are the most bullish on stocks since before the 2022 bear market, says Vanguard // MarketWatch. 2023. July 19. URL: https://www.marketwatch.com/story/u-s-stocks-may-keep-falling-with-s-p-500-likely-to-snap-longest-streak-above-50-day-moving-average-in-3-years-1181a3ec?mod=markets (access date: 20.07.2023).

Информация об авторах

Николай Андреевич Красовский, канд. физ.-мат. наук, математик 1-й категории, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия).

Александр Михайлович Тарасьев, д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор кафедры менеджмента и маркетинга АНО ВО «Гуманитарный университет» (Екатеринбург, Россия).

Information about the authors

Nikolay A. Krasovskii, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), mathematician of the 1st category, Department of Dynamic Systems, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS) (Yekaterinburg, Russia).

Alexander M. Tarasyev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Head of the Department of Dynamic Systems, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); professor at Management and Marketing Department, Liberal Arts University – University for Humanities (Yekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию | The article was submitted 01.08.2023.
Одобрена после рецензирования | Approved after reviewing 15.08.2023.