Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 3 (42). С. 17–22.
Bulletin of Liberal Arts University. 2023. No. 3 (42). P. 17–22.

УДК 656.02:514.1
doi:10.35853/vestnik.gu.2023.3(42).02
5.2.3

Алгоритмы построения оптимальных сетей для задач транспортной логистики в случае неоднородной среды

Павел Дмитриевич Лебедев
ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия,
pleb@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
Александр Александрович Успенский
ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
АНО ВО Гуманитарный университет, Екатеринбург, Россия,
uspen@imm.uram.ru, https://orcid.org/0000-0003-0725-4233

Аннотация. Исследуется проблема построения оптимальной сети центров в задаче транспортной логистики. Считается, что сеть предназначена для обслуживания участка M территории со сложным рельефом. Затраты на перемещение транспорта на элементарном участке пути в окрестности любой точки зависят от координат точки. Оптимальной считается такая сеть S, для которой затраты на транспортировку от произвольной точки из M до одной из точек S являются минимальными. Предложена неэвклидова метрика, расстояние в которой равно минимуму затрат на перевозку из одной точки в другую по одному из маршрутов. Введено в рассмотрение дифференциальное включение, множества достижимости которого совпадают с кругами в новой метрике. Основу алгоритмов составляют разбиение множества M на области влияния текущих точек из S и нахождение для каждой области точки, обеспечивающей минимальные затраты. При этом координаты новых логистических центров вычисляются, отталкиваясь от оптимальных траекторий, соединяющих текущий центр с наиболее удаленными от него в неэвклидовой метрике точками из его области влияния. Создан программный комплекс, реализующий разработанные алгоритмы построения сети центров, с функцией визуализации областей влияния узлов сети S. Рассмотрен пример решения задачи для области, в которой рельеф задает функцию затрат на транспортировку, линии уровня которой являются эллипсами с общим центром.

Ключевые слова: логистические зоны, оптимальная траектория, обобщенный круг, итерационный алгоритм, дифференциальное включение, чебышевский центр

Для цитирования: Лебедев П. Д., Успенский А. А. Алгоритмы построения оптимальных сетей для задач транспортной логистики в случае неоднородной среды // Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 3 (42). С. 17–22. DOI 10.35853/vestnik.gu.2023.3(42).02.

Algorithms for Constructing Optimal Networks for Transport Logistics Problems in the Case of a Heterogeneous Environment

Pavel D. Lebedev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia, pleb@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
Alexander A. Uspenskii
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Liberal Arts University – University for Humanities, Yekaterinburg, Russia, uspen@imm.uram.ru, https://orcid.org/0000-0003-0725-4233

Abstract. We study the problem of constructing an optimal network of centers in the problem of transport logistics. It is believed that the network is designed to serve the area *M* of the territory with a complex terrain. The cost of moving a transport on an elementary section of the path in the vicinity of any point depends on the coordinates of the point. An optimal network S is one for which the cost of transporting from any given point in M to any given point in S is minimal. A non-Euclidean metric is proposed, the distance in which is equal to the minimum cost of transportation from one point to another along one of the routes. We have introduced a differential inclusion whose reachability sets coincide with circles in the new metric. The algorithms are based on partitioning the set *M* into areas of influence of current points from *S* and finding for each area a point that provides minimal costs. At the same time, the coordinates of new logistics centers are calculated based on the optimal trajectories connecting the current center with the points farthest from it in the non-Euclidean metric from its area of influence. We also have created a software package that implements the developed algorithms for building a network of centers, with the function of visualizing the areas of influence of network nodes *S*. An example of solving the problem for an area in which the relief defines the function of transportation costs, the level lines of which are ellipses with a common center, is considered.

Keywords: logistic zones, optimal trajectory, generalized circle, iterative algorithm, differential inclusion, Chebyshev center

Введение

Для проектирования сети объектов массового обслуживания [Гаджинский 2005; Десятов 1989] важно минимизировать затраты на транспортировку грузов. Сформулируем задачу на языке математических конструкций. Пусть задано плоское множество M и число n логистических центров, которые можно считать материальными точками. Требуется найти такое размещение S центров, чтобы затраты на транспортировку грузов из произвольной точки компакта M до одной из точек S были минимальными. При этом среда считается неоднородной, затраты на транспортировку зависят от координат текущей точки [Казаков, Лемперт 2011]. Это соответствует практическим задачам транспортной логистики, в которых различные маршруты обладают кардинально отличающимися условиями [Неруш, Саркисов 2023]. Авторы для решения сформулированной задачи существенно модифицировали алгоритмы, которые ранее использовались для случая изотропной среды [Лебедев, Успенский, Ушаков 2013; Лебедев, Успенский 2016]. Статья продолжает исследования, начатые в работе [Лебедев, Успенский 2023].

Постановка задачи и методы решения

Пусть на множестве $G \subseteq R^2$ определена непрерывная строго положительная функция $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$, задающая затраты на транспортировку груза в окрестности точки $\mathbf{x} = (x, y)$. Считается, что затраты на транспортировку по маршруту, идущему от точки $\mathbf{x}$ до точки $\mathbf{y}$ по кривой Γ, равны

$$\sigma(\Gamma) = \int_{\Gamma} f(x,y)\,dl. \tag{1}$$

Здесь интеграл берется по кривой Γ, l – переменная длина дуги кривой.

Обозначим $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – множество всех непрерывных кривых, вложенных в G, у которых один конец совпадает с $\mathbf{x}$, а другой с $\mathbf{y}$. Минимальная стоимость перевозки груза между точками равна

$$\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\Gamma \in G(\mathbf{x},\mathbf{y})} \sigma(\Gamma). \tag{2}$$

Формула (2) выражает неоднородность среды и задает специфическую метрику на множестве G. Аналогичная метрика рассмотрена, например, в работе [Казаков, Лебедев 2017].

Пусть заданы компактное множество $M \subset \mathbf{R}^2$ и набор из n точек $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n\} \subset G$. Обозначим

$$\mathrm{H}_M(S) = \max_{\mathbf{m} \in M} \min_{i=\overline{1,n}} \mu(\mathbf{m}, \mathbf{s}_i)$$

функцию, равную максимуму затрат на транспортировку из произвольной точки области M до какой-либо точки из сети S.

Задача. Пусть заданы натуральное число n, множество G, непрерывная строго положительная функция $f(\mathbf{x})$ и компакт M. Требуется построить набор из n точек S такой, чтобы величина $\mathrm{H}_M(S)$ была минимальной.

При решении задачи авторы используют подходы, основанные на разбиении компакта M на области влияния точек. В дальнейшем полагаем, что задача сформулирована и задано некоторое начальное приближение S сети центров.

Определение 1. Обобщенной зоной Дирихле точки $\mathbf{s}_i$ во множестве M называется

$$D^{(i)}(S, M) = \{\mathbf{m} \in M : \mu(\mathbf{m}, \mathbf{s}_i) = \min_{j=\overline{1,n}} \mu(\mathbf{m}, \mathbf{s}_j)\}.$$

Для всех точек из обобщенной зоны Дирихле наиболее выгодным является маршрут до точки $\mathbf{s}_i$.

Определение 2. Обобщенным кругом с центром в точке $\mathbf{s}$ радиуса r назовем множество

$$O_f(\mathbf{s}, r) = \{\mathbf{g} \in G : \mu(\mathbf{g}, \mathbf{s}) \le r\}.$$

В новых терминах задача сводится к построению такого набора из n обобщенных кругов минимального радиуса r, чтобы множество M было вложено в их объединение. Похожие задачи рассмотрены, например, в [Казаков, Лебедев 2017].

Теорема 1. Для произвольной точки $\mathbf{s} \in G$ и числа $r > 0$ обобщенный круг $O_f(\mathbf{s}, r)$ совпадает с множеством достижимости дифференциального включения [Куржанский, Филиппова 1986]

$$\dot{\mathbf{x}} \in U(\mathbf{x}) \tag{3}$$

с начальным множеством $\{\mathbf{s}\}$, где $U(\mathbf{x}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2 : \|\mathbf{u}\| \le (f(\mathbf{x}))^{-1}\}$ – круг в обычной евклидовой метрике.

Доказательство базируется на том факте, что если провести кривую Γ, соединяющую точку $\mathbf{s}$ и точку $\mathbf{g}$, то значение интеграла (1), определяющего стоимость перевозки вдоль этой кривой, равно времени, за которое точка, двигаясь по Γ в рамках включения (3), может пройти от $\mathbf{s}$ к $\mathbf{g}$. Тогда минимальное время, за которое точка при движении по закону (3) может пройти путь между двумя точками, совпадает с минимумом (2) из всех интегралов по кривым, соединяющим точки [Красовский, Субботин 1974]. Точнее, для любой точки $\mathbf{g} \in G$ кривая $\Gamma^* \in G(\mathbf{s}, \mathbf{g})$, на которой достигается минимум в выражении (1), представляет собой кривую, по которой точка x, двигаясь со скоростью $1/f(\mathbf{x})$, может из точки $\mathbf{s}$ достичь точки $\mathbf{g}$.

Для решения задачи построения оптимальной сети модернизирован разработанный в среде MATLAB программный комплекс [Свидетельство … 2015]. Он использует процедуры конструирования множеств достижимости дифференциальных включений, описывающих распространение волны в неоднородной среде, для формирования обобщенных зон Дирихле. Они согласно теореме 1 совпадают с множествами, в которых затраты на транспортировку от текущей точки не превышают заданную положительную величину. Затем для каждой точки $\mathbf{s}_i$ выделяются точки $\mathbf{d}^{(j)}$, такие, что $\mu\left(\mathbf{d}^{(j)}, \mathbf{s}_i\right) = H_{\{s_i\}}\left(D^{(i)}(S, M)\right)$. Далее строятся траектории Γ_j, транспортировка по которыми из $\mathbf{s}_i$ в $\mathbf{d}^{(j)}$ идет с наименьшими затратами. Вычисляется число k этих точек. Для каждой траектории находится предельное положение $\mathbf{v}_j$ единичного вектора, сонаправленного касательной к кривой Γ_j в точке $\mathbf{s}_i$. Затем строится новая точка сети по формуле

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \mathbf{s}_i + \gamma\, c\left(\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{k}\right),$$

где $c(M)$ – чебышевский центр множества M [Гаркави 1962], а $\gamma > 0$ – настраиваемый параметр. Похожий алгоритм используется в статье [Лебедев, Лемперт, Казаков 2022].

Пример решения задачи

В качестве множества M рассмотрим прямоугольник

$$M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 1{,}5,\ |y| \le 1\},$$

в качестве G всю плоскость, а функцию, описывающую рельеф местности, примем равной

$$f(x,y) = \frac{8(x+0{,}5)^2 + 2(y+0{,}5)^2 + 4}{4(x+0{,}5)^2 + (y+0{,}5)^2 + 6}.$$

Требуется решить задачу построения оптимально сети при $n = 2$ и $n = 3$.

Заметим, что линии уровня функции $f(x, y)$, задающей затраты на перемещение, являются эллипсами с центром в (–0,5, –0,5). Решение задачи найдено путем моделирования итерационного изменения координат точек сети центров и построения обобщенных кругов, покрывавших M. Компакт M, точки сети S_2 и обобщенные круги $O_f(\mathbf{s}_i, r)$, $i = 1, 2$, показаны на рис. 1. Координаты логистических центров равны

$$S_2 = \{(-0{,}0895,\ 0{,}1129),\ (1{,}3346,\ 0{,}0056)\}.$$

Радиус обобщенных кругов $r = 1{,}6683$, что соответствует минимальным затратам на транспортировку от произвольной точки из M до ближайшей в метрике (2) точки из S_2.

Компакт M, точки сети S_3 и обобщенные круги $O_f(\mathbf{s}_i, r)$, $i = 1, \ldots, 3$, показаны на рис. 3 для случая задачи при $n = 3$. Координаты логистических центров равны

$$S_3 = \{(0{,}9714,\ -0{,}4296),\ (0{,}8570,\ 0{,}5784),\ (-0{,}9218,\ 0{,}0744)\}.$$

Радиус обобщенных кругов $r = 1{,}2175$.

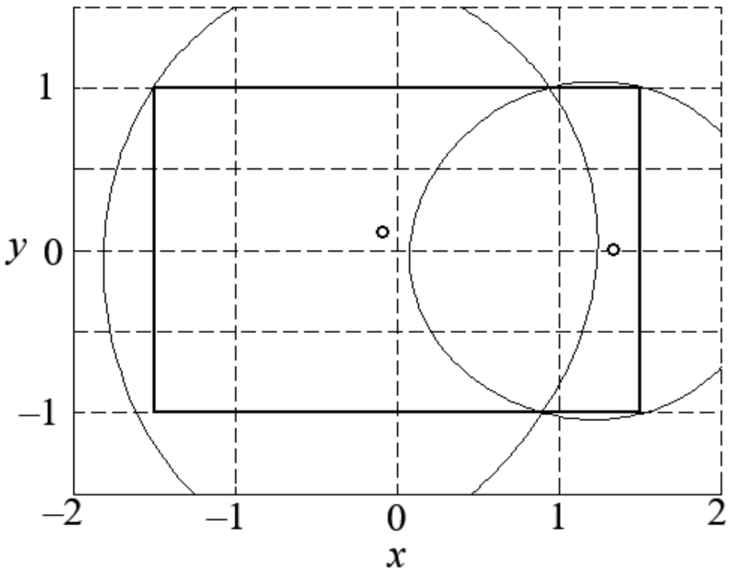

Рис. 1. Компакт M (его граница обозначена жирной линией), обобщенные круги $O_f(\mathbf{s}_i, r)$, $i = 1, 2$ (их граница обозначена тонкой линией) и точки сети S_2 (обозначены маркерами) (выполнено авторами с использованием программного комплекса [Свидетельство … 2015]).

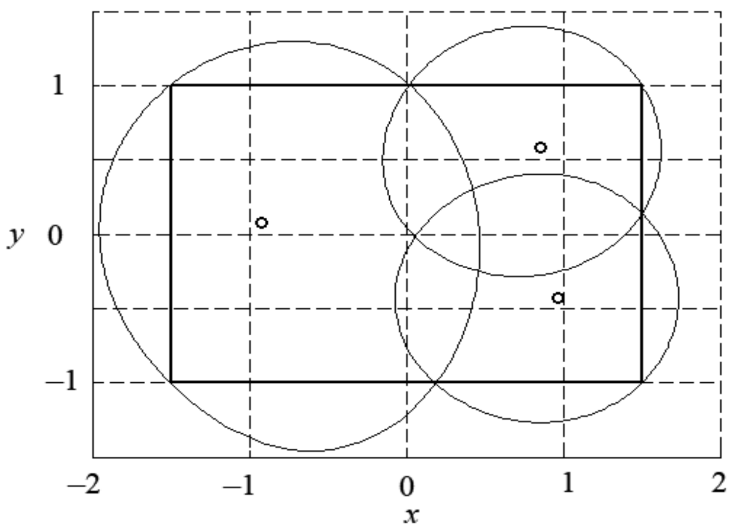

Рис. 2. Компакт M (его граница обозначена жирной линией), обобщенные круги $O_f(\mathbf{s}_i, r)$, $i = 1, \ldots, 3$ (их граница обозначена тонкой линией) и точки сети S_3 (обозначены маркерами) (выполнено авторами с использованием программного комплекса [Свидетельство … 2015]).

Заключение

Разработанные алгоритмы предназначены для решения задачи о построении сети S логистических центров, обеспечивающих минимальные расходы на транспортировку из любой точки заданной области. На основе предложенных процедур создан программный комплекс, вычисляющий координаты точек и аппроксимации их зон обслуживания. Основными элементами при построении решения являются траектории до ключевых точек множества M, расходы на транспортировку из которых в S максимальны, и сдвиг точек в направлении вектора, равного чебышевскому центру предельных положений касательных векторов. Выполнено моделирование примера построения оптимальных логистических сетей и визуализация результатов.

Список источников

Гаджинский А. М. Логистика. 12-е изд., перераб. и доп. М. : Дашков и К, 2005. 484 с.

Гаркави А. Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1962. Т. 26, № 1. С. 87–106.

Десятов В. Г. Проектирование систем объектов общественного комплекса промышленных предприятий : учеб. пособие. М. : МАРХИ, 1989. 78 с.

Казаков А. Л., Лебедев П. Д. Алгоритмы построения наилучших n-сетей в метрических пространствах // Автоматика и телемеханика. 2017. Вып. 7. С. 141–155.

Казаков А. Л., Лемперт А. А. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 7. С. 50–57.

Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974. 456 с.

Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.

Лебедев П. Д., Лемперт А. А., Казаков А. Л. Алгоритмы построения оптимального покрытия плоских фигур в динамической метрике // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 60. С. 58–72. DOI 10.35634/2226-3594-2022-60-04.

Лебедев П. Д., Успенский А. А. Алгоритмы построения оптимальных упаковок в трехмерном евклидовом пространстве // Modern Problems in Mathematics and its Applications (MPMA 2016) : Proceedings of the 47th International Youth School-conference, Yekaterinburg, Russia, January 31 – February 6, 2016 / ed. by A. A. Makhnev, S. F. Pravdin (CEUR-WS 2016. Vol. 1662). Yekaterinburg : Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, 2016. P. 84–93.

Лебедев П. Д., Успенский А. А. Применение множеств симметрии в задачах транспортной логистики // Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 2 (41). С. 31–36. DOI 10.35853/vestnik.gu.2023.2(41).03.

Лебедев П. Д., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Алгоритмы наилучшей аппроксимации плоских множеств объединениями кругов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. № 4. С. 88–99.

Неруш Ю. М., Саркисов С. В. Транспортная логистика : учебник для вузов. М. : Юрайт, 2023. 351 с.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661543 Российская Федерация. Программа вычисления оптимального покрытия полусферы набором сферических сегментов : № 2015661543 : заявл. 11.09.2015: опубл. 29.10.2015 / Лебедев П. Д.; правообладатель ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН). – 1 с.

Информация об авторах

Павел Дмитриевич Лебедев, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина (Екатеринбург, Россия).

Александр Александрович Успенский, д-р физ.-мат. наук, заведующий сектором ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; доцент АНО ВО «Гуманитарный университет» (Екатеринбург, Россия).

Information about the authors

Pavel D. Lebedev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin (Yekaterinburg, Russia).

Alexander A. Uspenskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Head of sector, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Assoc. prof., Liberal Arts University – University for Humanities (Yekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию | The article was submitted 14.08.2023.
Одобрена после рецензирования | Approved after reviewing 28.08.2023.