Вестник Гуманитарного университета. 2024. Т. 12, № 3. С. 7–13.
Bulletin of Liberal Arts University. 2024. Vol. 12, no. 3. P. 7–13.

ЭКОНОМИКА | ECONOMICS

УДК 656.02:514.1
doi:10.35853/vestnik.gu.2024.12-3.01
5.2.3.

О множественности оптимальных траекторий в задачах логистики в неоднородных средах

Павел Дмитриевич Лебедев
ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия, pleb@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
Александр Александрович Успенский
ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
АНО ВО «Гуманитарный университет», Екатеринбург, Россия,
uspen@imm.uram.ru, https://orcid.org/0000-0003-0725-4233

Аннотация. Исследуется задача о построении оптимального маршрута на плоскости в случае неоднородной среды и выделении логистических зон. Критерием оптимальности считается стоимость транспортировки груза. Получены описания оптимальных траекторий в виде ломаных. Рассмотрен случай неоднородной среды, которая представляет собой две полуплоскости, в каждой из которых затраты на транспортировку груза по участку единичной длины постоянны. При этом свойства полуплоскостей различаются между собой, что соответствует встречающимся в транспортной логистике ситуациям, когда граничат две области с различными характеристиками. Доказана теорема о структуре оптимальных траекторий, соединяющих две точки. Установлено, что в случае, если две точки лежат в различных полуплоскостях, траектория имеет вид ломаной из двух отрезков, которые образуют угол, заданный формулой, определенной по закону Снелиуса. Выделено сингулярное множество – совокупность точек на плоскости, из которых исходят две или более оптимальные траектории. Приведен иллюстративный пример построения логистических зон обслуживания и построен график функции, определяющей минимальную стоимость транспортировки груза до базы. Для моделирования примера использован программный комплекс, основанный на оптико-геометрических аналогиях при построении волновых фронтов в неоднородной среде. При визуализации результатов в виде карты линий уровня функции цены транспортировки груза до базы построены ветви сингулярного множества, на котором эти линии теряют гладкость. На границе базового множества найдены характеристические точки (псевдовершины), отвечающие за зарождение ветвей сингулярного множества.

Ключевые слова: логистические зоны, оптимальная траектория, задача управления, закон Снелиуса, сингулярное множество, псевдовершина

Для цитирования: Лебедев П. Д., Успенский А. А. О множественности оптимальных траекторий в задачах логистики в неоднородных средах // Вестник Гуманитарного университета. 2024. Т. 12, № 3. С. 7–13. DOI 10.35853/vestnik.gu.2024.12-3.01.

On the Multiplicity of Optimal Trajectories in Logistics Problems in Heterogeneous Mediums

Pavel D. Lebedev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia, pleb@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
Alexander A. Uspenskii
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Liberal Arts University – University for Humanities, Yekaterinburg, Russia, uspen@imm.uram.ru, https://orcid.org/0000-0003-0725-4233

Abstract. The paper addresses the problem of constructing an optimal route on a plane in the case of a heterogeneous environment and identifying logistics zones. The optimality criterion is the cost of cargo transportation. Descriptions of optimal trajectories in the form of broken lines are obtained. The case of a heterogeneous medium, which consists of two half-planes, in each of which the costs of transportation along a section of unit length are constant, is considered. At the same time, the properties of the half-planes differ from one another, which corresponds to situations encountered in transport logistics when two areas with different characteristics border. A theorem on the structure of optimal trajectories connecting two points is proven. It has been established that if two points lie in different half-planes, then the trajectory has the form of a broken line of two segments that form an angle with a given formula defined by Snell's law. A singular set has been identified - a set of points on the plane from which two or more optimal trajectories emanate. An example of constructing logistics service areas is given and a graph of a function is constructed that determines the minimum cost of transporting cargo to the base. To simulate the example, a software package was used, based on optical-geometric analogies when constructing wave fronts in an inhomogeneous medium. When visualizing the results in the form of a map of level lines of the price function of transporting cargo to the base, two branches of a singular set are constructed, on which these lines lose smoothness. On the boundary of the base set, characteristic points (pseudo-vertices) are found that are responsible for the origin of branches of the singular set.

Keywords: logistic zones, optimal trajectory, control problem, Snell's law, singular set, pseudovertex

For citation: Lebedev PD, Uspenskii AA. On the Multiplicity of Optimal Trajectories in Logistics Problems in Heterogeneous Mediums. *Vestnik Gumanitarnogo universiteta = Bulletin of Liberal Arts University*. 2024;12(3):7-13. (In Russ.). DOI:10.35853/vestnik.gu.2024.12-3.01.

Введение

В задачах логистики [Гаджинский 2005] часто требуется строить функцию цены перевозки груза от произвольной точки на заданной территории до базы. В данном случае стоимость передвижения на плоскости обозначим как функцию от координат текущей точки [Десятов 1989]. Базу можно считать замкнутым множеством, а допустимые маршруты – кусочно-гладкими кривыми. Сформулируем задачу на языке математических конструкций, описывающих логистические зоны [Миротин, Бульба, Демин 2009], в которых стоимость транспортировки груза изменяется в заданных границах.

Постановка задачи и методы решения

Ограничимся рассмотрением случая, когда объект представляет собой замкнутое множество M с гладкой границей ∂M. Считается, что затраты на транспортировку груза по маршруту S, идущему от точки $\mathbf{x}$ до точки $\mathbf{y}$, равны

$$\sigma(S) = \int_S f(x, y)ds, \tag{1}$$

где s – переменная длина дуги кривой, а функция $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$, определенная на множестве G, кусочно-гладкая и удовлетворяет неравенству $f(\mathbf{x}) > 0$. Похожая задача рассматривалась, например, в [Лебедев, Лемперт, Казаков 2022].

Обозначим $\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ множество всех кусочно-гладких кривых, вложенных в G, у которых один конец совпадает с $\mathbf{x}$, а другой – с $\mathbf{y}$. Минимальная стоимость перевозки груза между точками равна

$$\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{S\in\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})} \sigma(S). \tag{2}$$

Обозначим $S^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ траекторию, затраты на перемещение груза по которой между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ являются минимальными. $S^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будем называть оптимальной траекторией.

Считаем, что функция затрат $f(\mathbf{x})$ на перемещение груза кусочно-постоянна и равна k_1 в полуплоскости Π_1, в том числе на ее границе Ξ, и k_2 в полуплоскости Π_2. Полагаем, что $k_2 > k_1$ и $M \subset \Pi_1$. Требуется построить функцию цены доставки груза до базы в виде совокупности линий уровня, при этом выделив множество их негладкости.

Теорема 1. Если точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ находятся в Π_1, то $S^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ есть отрезок $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Если $\mathbf{x} \in \Pi_2$ и $\mathbf{y} \in \Pi_1$, то $S^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ есть ломаная, состоящая из двух отрезков $[\mathbf{x}, \mathbf{z}]$ и $[\mathbf{z}, \mathbf{y}]$. При этом $\mathbf{z} \in \Xi$ и выполняется равенство

$$k_2 \sin \alpha_2 = k_1 \sin \alpha_1, \tag{3}$$

где α_1 – угол между вектором $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ и нормалью к прямой Ξ, направленной в сторону полуплоскости Π_1,

α_2 – угол между вектором $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ и нормалью к прямой Ξ, направленной в сторону полуплоскости Π_2.

Доказательство. Задачу о вычислении интеграла (1) можно свести к нахождению времени движения материальной точки со скоростью, равной

$$v(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x}) \tag{4}$$

по кривой S. Если $S \subset \Pi_1$, то интеграл совпадает с длиной кривой S, умноженной на k_1. Если S состоит из частей $S_1 \subset \Pi_1$ и $S_2 \subset \Pi_2$, то $\sigma(S)$ равна сумме длины кривой S_1, умноженной на k_1, и длины кривой S_2, умноженной на k_2. Подобные задачи быстродействия изучались, например, в [Лебедев, Успенский 2019]. В этой работе показано, что траектория, по которой точка, двигаясь со скоростью (4), быстрее всего перемещается на полуплоскости Π_1 – это отрезок. Если начальный пункт расположен в Π_1, а конечный пункт в Π_2, то оптимальная траектория состоит из двух отрезков, которые образуют углы с нормалью к прямой Ξ, связанные законом Снелиуса [Кравцов, Орлов 1980]. При этом закон выражен формулой, совпадающей с (3).

Заметим, что если рассматривать произвольные точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в Π_2, то могут существовать две оптимальные траектории, соединяющие их. Одна из них представляет собой отрезок $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, а другая – ломаная, состоящая из трех отрезков, один из которых лежит на прямой Ξ, а другие образуют с ним угол полного преломления [Кравцов, Орлов 1980]. Но из условий задачи и Теоремы 1 следует, что любую точку плоскости с любой точкой множества M соединяет только одна оптимальная траектория S^*, на которой выполняется равенство (2).

Назовем обобщенное проекцией точки $\mathbf{x}$ на M такую точку $\mathbf{y}$, что

$$\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{m}\in M} \mu(\mathbf{x},\mathbf{m}). \tag{5}$$

Обозначим $\Omega_M(\mathbf{x})$ множество всех ее обобщенных проекций на M.

Определение 1. Сингулярным множеством $L^*(M)$ назовем геометрическое место точек, из которых исходят не менее двух оптимальных траекторий $S^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)$, соединяющих их с M:

$$L^*(M) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \operatorname{card}\left(\Omega_M(\mathbf{x})\right) > 1\right\}.$$

Здесь card(M) означает мощность множества M, i – номер оптимальной траектории. Введенное множество $L^*(M)$ является обобщением понятия биссектрисы [Лебедев, Успенский 2023] для случая неоднородной (плоскослоистой) среды.

Сингулярное множество играет ключевую роль при построении функции цены

$$u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in M} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{6}$$

Оптимальные траектории состоят из отрезков внешних нормалей к кривой Γ, которые терпят излом на прямой Ξ, здесь углы излома определены формулой (3). При этом траектории продолжаются до пересечения с замыканием сингулярного множества $L^*(M)$ [Успенский, Лебедев 2010].

Ключевыми точками, отвечающими за зарождение сингулярного множества, являются так называемые псевдовершины [Лебедев, Успенский 2009] границы множества M. Точка $\mathbf{y}_0$ называется псевдовершиной множества M, порождающей крайнюю точку $\mathbf{x}_0$ сингулярного множества, если существуют последовательности

$$\left\{\mathbf{x}_i^+, \mathbf{x}_i^-\right\}_{i=1}^{\infty} \subset \partial M$$

и

$$\left\{\mathbf{y}_i\right\}_{i=1}^{\infty} \subset L^*(M),$$

такие, что

$$\forall i \in \mathbf{N} \left\{\mathbf{x}_i^+, \mathbf{x}_i^-\right\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{y}_i)$$

и имеют место предельные соотношения

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_0, \quad \lim_{i\to\infty}\left(\mathbf{x}_i^+, \mathbf{x}_i^-\right) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0).$$

Крайняя точка $\mathbf{x}_0$ может не входить в $L^*(M)$, но служит точкой прекращения для кривой, совпадающей с его замыканием. Псевдовершина $\mathbf{y}_0$ является пунктом, в котором заканчивается оптимальная траектория, исходящая из крайней точки $\mathbf{x}_{0.}$

Для решения задач транспортной логистики в неоднородной среде модернизирован разработанный в среде MATLAB программный комплекс [Свидетельство … 2017]. Он использует методы геометрической оптики, которые позволяют строить преломление луча по закону Снелиуса и конструирует линии уровня Φ функции цены как волновые фронты при распространении сигнала в плоскослоистой среде. В свою очередь, в задачах транспортной логистики программный комплекс формирует кривые Φ, которые разграничивают различные логистические зоны.

Пример решения задачи

В качестве множеств M рассмотрим подграфик функции

$$y(x) = \begin{cases} \exp(-2x^2), \text{ если } x \le 0, \\ \exp(-x^2), \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

В качестве функции, задающей затраты на транспортировку груза, примем

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y \le 1{,}5, \\ 2, \text{ если } y > 1{,}5. \end{cases}$$

Требуется найти аппроксимацию функции цены (6) транспортировки груза до множества M в виде совокупности линий уровня, выделив сингулярное множество, а также построить график функции в трехмерном пространстве. Заметим, что множество M вложено в полуплоскость Π_1, в которой стоимость транспортировки меньше, чем в Π_2.

Решение задачи найдено путем моделирования распространения волновых фронтов. Сингулярное множество $L^*(M)$ состоит из двух ветвей. Одна из них пересекает прямую Ξ и претерпевает в ней излом. Для каждой из ветвей найдены крайние точки $\mathbf{x}_1 \approx (-1{,}43;\ 0{,}93)$ и $\mathbf{x}_2 \approx (1{,}96;\ 1{,}66)$. Они порождены псевдовершинами $\mathbf{y}_1 \approx (-1{,}05;\ 0{,}11)$ и $\mathbf{y}_2 \approx (1{,}4;\ 0{,}14)$.

Граница Г базового множества M, его псевдовершины, сингулярное множество и карта линий уровня Ф функции цены $u(\mathbf{x})$ транспортировки груза с шагом 0,2 представлены на рис. 1. На нем также показано, что кривые Ф терпят изломы на множестве $L^*(M)$ и на границе Ξ (показанной пунктирной линией) полуплоскостей Π_1 и Π_2, а касательные к ним ортогональны оптимальным траекториям S^*, которые приходят в них, что следует из формулы (5).

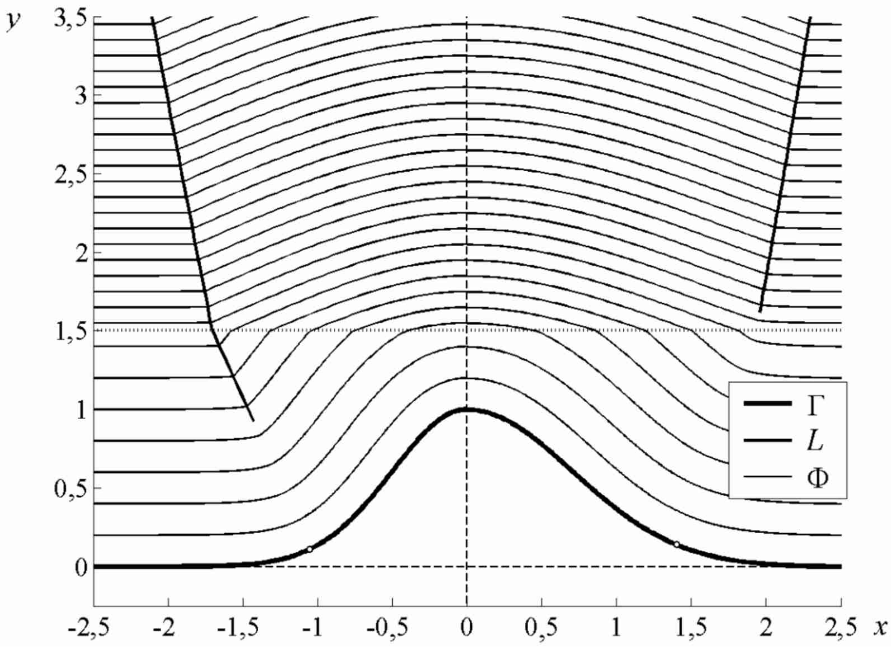

Рис. 1. Множество М (его граница Г обозначена жирной кривой), его псевдовершины (маркеры), сингулярное множество $L^*(M)$ (полужирная кривая) и линии уровня функции цены $u(\mathbf{x})$ транспортировки груза с шагом 0,2 (тонкие кривые) (выполнено авторами с использованием программного комплекса)

Fig. 1. The Set M (its boundary G is highlighted by a bold curve), Its Pseudo-vertices (markers), the Singular Set $L^*(M)$ (a further bold curve) and the Level Lines of the Price Function $u(\mathbf{x})$ for Cargo Transportation with an Interval of 0.2 (thin curves) (created by the authors using a software package)

Источник: [Свидетельство … 2017]

График функции $u(\mathbf{x})$ показан на рис. 2 на прямоугольной сетке с ячейкой 0,1 × 0,1. Рисунок демонстрирует, что функция $u(\mathbf{x})$ теряет гладкость в точках $L^*(M)$ и на границе Ξ полуплоскостей.

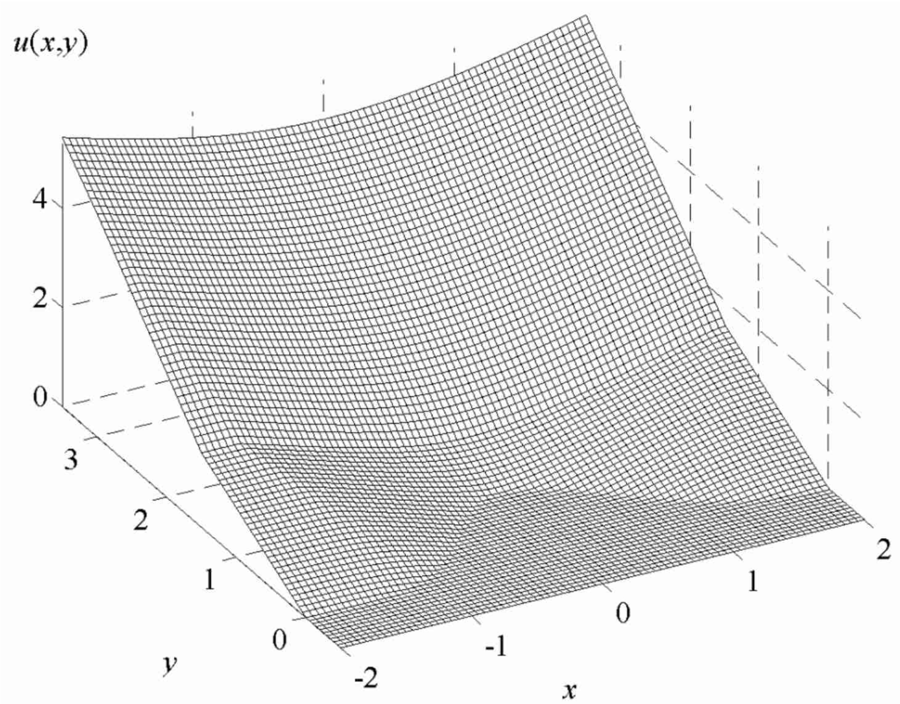

Рис. 2. График функции цены u(x, y) транспортировки груза на прямоугольной решетке с ячейкой 0,1 × 0,1 (выполнено авторами с использованием программного комплекса)
Fig. 2. The Graph of the Price Function u(x, y) for Cargo Transportation on a Rectangular Grid with a Grid Spacing of 0.1 × 0.1 (created by the authors using a software package)
Источник: [Свидетельство … 2017]

Заключение

Разработанные алгоритмы предназначены для решения задач логистики в случае неоднородной среды. Они могут применяться для оптимизации транспортных маршрутов в виде ломаных и построения логистических зон, ограниченных линиями уровня функции цены транспортировки груза. Основной трудностью является построение маршрута, по которому транспортировка груза до текущей точки является самой низкой. В общем случае таких маршрутов может быть несколько. Ключевым элементом решения задачи служит построение сингулярного множества, из которого исходят более одной оптимальной траектории от базового множества M. При формировании сингулярного множества на границе базы выделяются характеристические точки – псевдовершины.

Список источников

Гаджинский А. М. Логистика. 12-е изд., перераб. и доп. М. : Изд-во Дашков и К., 2005. 484 с.

Десятов В. Г. Проектирование систем объектов общественного комплекса промышленных предприятий : учеб. пособие. М. : МАРХИ, 1989. 78 с.

Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М. : Наука, 1980. 304 с.

Лебедев П. Д., Лемперт А. А., Казаков А. Л. Алгоритмы построения оптимального покрытия плоских фигур в динамической метрике // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 60. С. 58–72. DOI 10.35634/2226-3594-2022-60-04.

Лебедев П. Д., Успенский А. А. Алгоритмы решения задачи быстродействия с круговой вектограммой скоростей в неоднородной среде // Челябинский физико-математический журнал. 2019. Т. 4, № 4. С. 387–397. DOI 10.24411/2500-0101-2019-14402.

Лебедев П. Д., Успенский А. А. Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. №. 7. С. 50–57.

Лебедев П. Д., Успенский А. А. Применение множеств симметрии в задачах транспортной логистики // Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 2 (41). С. 31–36. DOI 10.35853/vestnik.gu.2023.2(41).03.

Миротин Л. Б., Бульба А. В., Демин В. А. Логистика, технология, проектирование складов, транспортных узлов и терминалов. Ростов н/Д : Феникс, 2009. 409 с.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017662074 Российская Федерация. Программа построения волновых фронтов и функции евклидова расстояния до компактного невыпуклого множества : № 2017662074 : заявл. 06.07.2017 : опубл. 27.10.2017 / Лебедев П. Д., Успенский А. А. ; правообладатель ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН). 1 с.

Успенский А. А., Лебедев П. Д. Алгоритмы построения сингулярных множеств для одного класса задач быстродействия // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 3. С. 30–41. DOI 10.20537/vm100305.

Информация об авторах

Павел Дмитриевич Лебедев, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия).

Александр Александрович Успенский, д-р физ.-мат. наук, заведующий сектором, ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; доцент АНО ВО «Гуманитарный университет» (Екатеринбург, Россия).

Information about the authors

Pavel D. Lebedev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS) (Yekaterinburg, Russia).

Alexander A. Uspenskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Head of sector, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Assoc. prof., Liberal Arts University – University for Humanities (Yekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию | Submitted 05.06.2024.
Одобрена после рецензирования | Revised 27.06.2024.
Принята к публикации | Accepted 28.06.2024.