Вестник Гуманитарного университета. 2025. Т. 13, № 2. С. 7–13.
Bulletin of Liberal Arts University. 2025. Vol. 13, no. 2. P. 7–13.

ЭКОНОМИКА | ECONOMICS

УДК 656.02:514.1
doi:10.35853/vestnik.gu.2025.13-2.01
5.2.3.

Выделение сингулярных особенностей в пространственных задачах транспортной логистики

Павел Дмитриевич Лебедев
ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия, pleb@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
Александр Александрович Успенский
ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
АНО ВО Гуманитарный университет, Екатеринбург, Россия,
uspen@imm.uram.ru, https://orcid.org/0000-0003-0725-4233

Аннотация. Исследуется задача о построении оптимального маршрута в трехмерном пространстве до целевого множества, которое представляет собой объект нетривиальной геометрии. Разработаны алгоритмы построения слоев с заданными значениями функции затрат на перемещение динамического тела (аппарата) до целевого множества. При этом предполагается, что динамическое тело перемещается на значительные расстояния и его размерами допустимо пренебречь, что позволяет моделировать это тело в виде материальной точки. Описано сингулярное множество – биссектриса, на которой функция затрат теряет гладкость. Биссектриса состоит из особых точек – из каждой точки биссектрисы исходит не одна, а несколько оптимальных траекторий. Получены необходимые и достаточные условия того, что некоторый отрезок является оптимальной траекторией. Выведены формулы крайних точек сингулярного множества в терминах кривизны поверхности целевого множества. Приведен пример построения поверхностей уровня функции затрат на основе выделения биссектрисы.

Ключевые слова: функция затрат, оптимальная траектория, проекция, евклидово расстояние, множество симметрии, биссектриса, рассеивающая поверхность.

Для цитирования: Лебедев П. Д., Успенский А. А. Выделение сингулярных особенностей в пространственных задачах транспортной логистики // Вестник Гуманитарного университета. 2025. Т. 13, № 2. С. 7–13. DOI 10.35853/vestnik.gu.2025.13-2.01.

Singularity Features Identification in Spatial Problems of Transport Logistics

Pavel D. Lebedev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia,
pleb@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-1693-3476
Alexander A. Uspenskii
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS);
Liberal Arts University – University for Humanities, Yekaterinburg, Russia,
uspen@imm.uram.ru, https://orcid.org/0000-0003-0725-4233

Abstract. The objective of this paper is to study the problem of constructing an optimal route in three-dimensional space to a target set, which is an object of nontrivial geometry. The authors developed algorithms for constructing layers with specified values of the cost function for moving the dynamic body (apparatus) to a target set. It is hypothesized that the dynamic body moves for significant distances and that its dimensions are negligible; this allows for the modeling of the body as a material point. This paper sets forth a distinctive configuration: that of a bisector on which the cost function becomes singular, losing smoothness. The bisector is constituted by specific points, from which multiple optimal trajectories emerge for each point on the bisector. The necessary and sufficient conditions for the identification of an optimal trajectory for some segment are obtained. The formulas for the extreme points of a singular set in terms of the curvature of the surface of the target set were derived. The paper provides an example of constructing cost function level surfaces based on bisector extraction.

Keywords: cost function, optimal trajectory, projection, Euclidean distance, symmetry set, bisector, scattering surface

For citation: Lebedev PD, Uspenskii AA. Singularity Features Identification in Spatial Problems of Transport Logistics. *Vestnik Gumanitarnogo universiteta = Bulletin of Liberal Arts University*. 2025;13(2):7-13. (In Russ.). DOI:10.35853/vestnik.gu.2025.13-2.01.

Введение

Актуальность пространственных задач транспортной логистики обусловлена, в частности, активной фазой развития летательных аппаратов [Александров, Нецветаев 2010]. Возникает необходимость в построении для произвольной точки пространства оптимальной траектории, затраты на перемещение по которой минимальны. В большинстве случаев можно считать, что затраты пропорциональны длине пути. Поэтому задача об отыскании оптимальной траектории сводится к нахождению ближайшей точки на целевом множестве, до которого нужно проложить маршрут.

Постановка задачи и методы решения

Полагаем, что целевое множество M, на которое должны прийти траектории динамического тела, ограничено гладкой поверхностью S в трехмерном пространстве. Подобное предположение обусловлено тем, что в большинстве случаев реальные базы обслуживания можно представить в виде протяженных тел, а не в виде кривых или точек. Для летательных аппаратов не нужны дороги или реки, они могут двигаться между пунктами по кратчайшему пути – по отрезку прямой и с постоянной скоростью. Поэтому затраты на перемещение одного аппарата можно принять равными длине пути, умноженной на постоянный коэффициент [Неруш, Саркисов 2025]. В этом случае решение задачи сводится к построению функции евклидового расстояния.

Задача. Пусть задано замкнутое множество M, на которое должны прийти траектории динамического тела, ограничено гладкой поверхностью S в трехмерном пространстве. Подобное предположение обусловлено тем, что в большинстве случаев реальные базы обслуживания можно представить в виде протяженных тел, а не в виде кривых или точек. Для летательных аппаратов не нужны дороги или реки, они могут двигаться между пунктами по кратчайшему пути – по отрезку прямой и с постоянной скоростью. Поэтому затраты на перемещение одного аппарата можно принять равными длине пути, умноженной на постоянный коэффициент [Неруш, Саркисов 2025]. В этом случае решение задачи сводится к построению функции евклидового расстояния.

Задача. Пусть задано замкнутое множество $M \subset \mathbf{R}^3$ с гладкой границей S. Требуется построить функцию евклидового расстояния $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ на $\mathbf{R}^3 \backslash M$ в виде карты поверхностей уровней, выделив множество их негладкости.

Ранее авторы исследовали похожие задачи для плоского случая. Пространственный случай является гораздо более сложным. Поверхности уровня функции евклидового расстояния $\mathbf{\Phi}(\tau) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : \rho(\mathbf{x}, M) = \tau\}$ при $\tau > 0$ могут иметь негладкие особенности, причем не в виде изолированных точек, как в плоском случае, а в виде кривых. В похожей постановке авторы исследовали задачу для уравнения эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$$

с краевым условием

$$u\big|_{\partial M} = 0.$$

Обобщенное (фундаментальное) решение уравнения эйконала совпадает с функцией $u(\mathbf{x})$, но имеет противоположный знак [Кружков 1975].

Обозначим через $\Omega_M(\mathbf{x})$ множество всех проекций точки $\mathbf{x}$ в евклидовой метрике. Если множество M выпукло, то у каждой точки $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \backslash M$ ближайший элемент на M ровно один [Лейхтвейс 1985]. Однако в рассматриваемом случае невыпуклого множества M существует сингулярное (особое) множество, для точек которого это не выполняется.

Определение 1. Пусть задано замкнутое множество $M \subset \mathbf{R}^3$. Биссектрисой $L(M)$ [Успенский, Лебедев 2021] множества M называется

$$L(M) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus M : \operatorname{card} \Omega_M(\mathbf{x}) > 1\right\}. \tag{1}$$

Обозначение card(·) символизирует мощность множества. Если множество конечно, то мощность равна числу его элементов. Однако в общем случае множество проекций может содержать континуум элементов, например если в него входит дуга окружности. Свойства подобных множеств в трехмерном пространстве описаны в [Sotomayor, Siersma, Garcia 1999]. С точки зрения задач быстродействия $L(M)$ – это так называемая рассеивающая поверхность, из каждой ее точки в разные от нее стороны исходят отличные друг от друга оптимальные траектории до целевого множества [Айзекс 1967]. Следует подчеркнуть, что теоретически возможная множественность оптимальных траекторий, исходящих из одной общей начальной точки, является фактором, существенно усложняющим построение решения задачи.

Определение 2. Если существуют последовательности $\left\{\left(\hat{\mathbf{y}}_i, \breve{\mathbf{y}}_i\right)\right\}_{i=1}^{\infty} \subset \partial M$ и $\left\{\mathbf{x}_i\right\}_{i=1}^{\infty} \subset L(M)$ такие, что выполняются условия

$$\forall i \in \mathbf{N} \left(\hat{\mathbf{y}}_i, \breve{\mathbf{y}}_i\right) \subseteq \Omega_M(\mathbf{x}_i),$$
$$\lim_{i \to \infty}\left(\hat{\mathbf{y}}_i, \breve{\mathbf{y}}_i\right) = \bar{\mathbf{y}},$$

то точка $\bar{\mathbf{y}}$ называется псевдовершиной [Успенский, Лебедев 2021] множества M. Если существует предел $\lim\limits_{i \to \infty} \mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}$, то точка $\bar{\mathbf{x}}$ называется крайней точкой биссектрисы, порожденной псевдовершиной $\bar{\mathbf{y}}$.

Псевдовершины играют ключевую роль при построении сингулярного множества, отвечают за его зарождение [Успенский, Лебедев 2024]. Их отыскание является начальным этапом при построении биссектрисы.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{R}^3 \backslash M$ – выпуклое множество. Если крайняя точка $\mathbf{x}$ порождена псевдовершиной $\mathbf{y}$, то точка $\mathbf{x}$ является центром кривизны нормального сечения Γ поверхности $S = \partial M$ в точке $\mathbf{y}$, имеющего наибольшую кривизну. При этом $\mathbf{x}$ совпадает с центром кривизны в точке $\mathbf{y}$.

Доказательство. По условию поверхность S совпадает с поверхностью выпуклого множества. Тогда во всех ее точках знаки главных кривизн [Александров, Нецветаев 2010] совпадают. Поэтому в этих точках выполняются условия теоремы 1 из [Успенский, Лебедев 2024]. Она устанавливает, что псевдовершина совпадает с центром кривизны главного сечения поверхности S с наибольшей по модулю кривизной.

Предложение 1. Пусть точка $\mathbf{x}$ лежит на внешней нормали N к множеству M в точке $\mathbf{y}$. Тогда необходимым условием того, что $\mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x})$, является

$$\left[\mathbf{x}, \mathbf{y}\right] \cap L(M) \subseteq \{\mathbf{x}\}. \tag{2}$$

Доказательство. Заметим, что точка $\mathbf{y}$ не может лежать на биссектрисе, поскольку совпадает со своей проекцией. Рассмотрим точку $\mathbf{y}^*$ из отрезка $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, не совпадающую ни с одним из его концов. Если найдется точка $\mathbf{z}$, такая, что $\mathbf{y}^* \in \Omega_M(\mathbf{z})$, $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{y}$, то в силу неравенства треугольника получим оценку

$$\left\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\right\| < \left\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\right\| + \left\|\mathbf{z} - \mathbf{y}^*\right\| \le \left\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\right\| + \left\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\right\| = \left\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\right\|.$$

Отсюда следует, что точка $\mathbf{y}$ не является проекцией точки $\mathbf{x}$ на M.

Предложение 2. Пусть точка x лежит на внешней нормали N к множеству M в точке $\mathbf{y}$. Тогда достаточным условием равенства $\{\mathbf{y}\} = \Omega_M(\mathbf{x})$ является то, что найдется точка $\mathbf{x}^* \in L(M)$, такая, что $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}^*, \mathbf{y}]$ и $\mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x}^*)$.

Доказательство. Если бы существовала точка $\mathbf{y}^* \in \Omega_M(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{y}$, то согласно неравенству треугольника выполнялось бы неравенство

$$\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\right\| < \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\right\| + \left\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\right\| \le \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\right\| + \left\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\right\| \le \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\right\|.$$

Тогда точка $\mathbf{y}$ лежала бы дальше от $\mathbf{x}^*$, чем $\mathbf{y}^*$. И не выполнялось бы условие $\mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x}^*)$.

Заметим, что условия предложения 1 не являются достаточными. При этом условия предложения 2 не являются необходимыми. Например, возможна ситуация, когда псевдовершина порождает крайнюю точку биссектрисы, при этом сама $\mathbf{x}$ не входит в биссектрису. Тогда все точки на луче $N^* = \left\{\mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) : \lambda > 0\right\}$ подпадают под вложение (2), однако их проекции не совпадают с $\mathbf{y}$. С другой стороны, для точек отрезка $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ не найдется точка $\mathbf{x}^* \in L(M)$, для которой выполнялись бы включения предложения 2. Однако для всех них проекцией служит $\mathbf{y}$.

Для решения задач построения логистики в трехмерном пространстве разработан в среде MATLAB программный комплекс [Лебедев, Успенский 2022]. Он реализуют экстраполяцию алгоритмов, которые ранее применялись для решения задач логистики на плоскости [Лебедев, Успенский 2023], при этом ключевыми процедурами служат алгоритмы отыскания псевдовершин, вычисления соответствующих им крайних точек биссектрисы и пошаговое построение аппроксимации сингулярного множества [Успенский, Лебедев 2024]. Заметим, что построение поверхностей уровня функции евклидового расстояния в случае, когда множество M ограничено гладкой поверхностью, существенно отличается от случая, когда M совпадает с гладкой кривой. Возникающие особенности волновых фронтов описаны, например, в [Арнольд 1996].

Пример решения задачи

В качестве целевого множества выбрано

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \leq x^2 + 2y^2\right\}. \quad (3)$$

Требуется найти аппроксимацию функции евклидового расстояния до M в виде карты поверхностей уровня, при этом выделив сингулярное множество $L(M)$.

Заметим, что поверхность S совпадает с эллиптическим параболоидом. Множество (3) удовлетворяет условиям теоремы 1. Множество псевдовершин параболоида образует кривую $\Pi \subset S$, описываемую параметрически:

$$\Pi = \left\{(t, 0, t^2) \in \mathbf{R}^3 : t \in (-\infty, \infty)\right\}.$$

Сингулярное множество $L(M)$ вложено в плоскость xOz, объединение его крайних точек образуют гладкую кривую. Ее точки определяются согласно теореме 1 как центры кривизны главного сечения поверхности S в точках из Π.

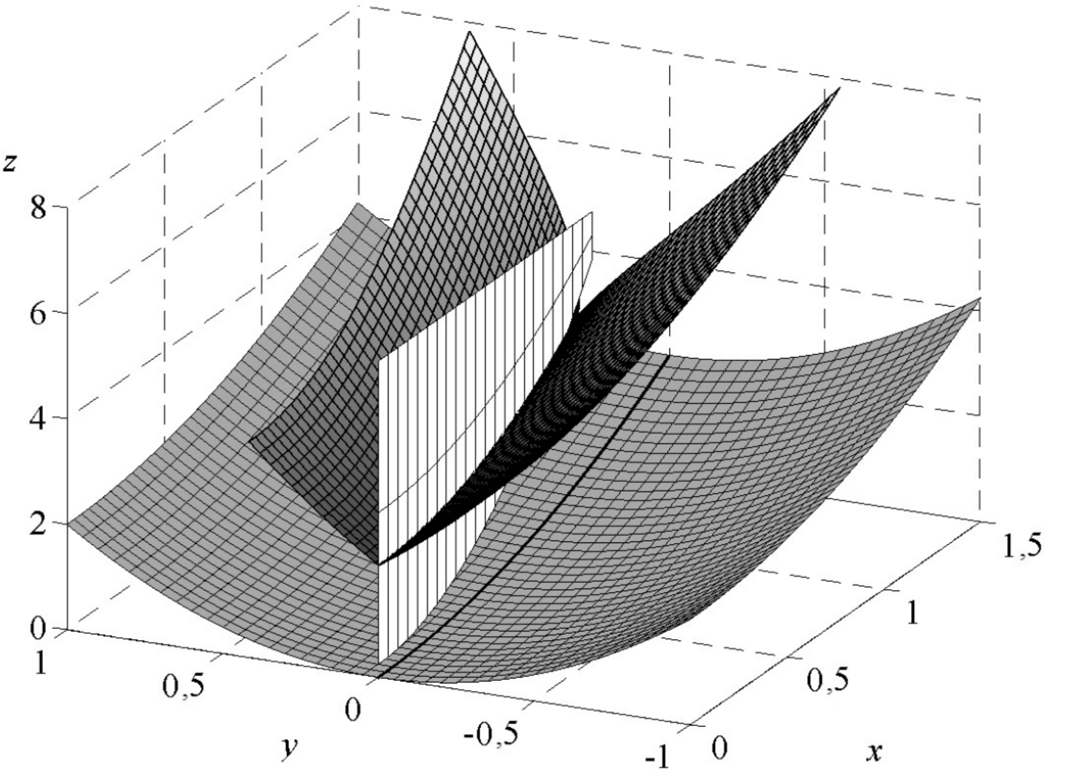

Рис. 1. Граница целевого множество M (светло-серая поверхность), множество псевдовершин Π (черная кривая) биссектриса $L(M)$ (белая поверхность) и поверхность уровня $\Phi(1)$ с меняющимся серым цветом (выполнено авторами с использованием программного комплекса [Лебедев, Успенский 2022])

Fig. 1. The boundary of the target set M (light grey surface), the set of pseudo-vertexes P (black curve) bisected by L(M) (white surface) and the level surface F (1) with a changing grey color (the authors used a software package)

На рис. 1, 2 показаны аппроксимации поверхностей уровня функции евклидового расстояния до множества (3), соответствующие значениям 1 и 1,5. Они терпят изломы на сингулярном множестве $L(M)$, которое необходимо для построения оптимальных траекторий. Для почти всех точек $\mathbf{x}$, лежащих на внешних нормалях к поверхности S, построенных в точке $\mathbf{y}$, выполняются либо условия предложения 1, либо условия предложения 2. В первом случае это означает, что отрезок нормали пересекает биссектрису и не является оптимальной траекторией. Во втором случае это значит, что нормаль пересекает $L(M)$ за пределами отрезка, и он является оптимальной траекторией. Единственное особое семейство – это нормали, построенные в псевдовершинах П. Оптимальной траекторией на каждой из них выступает отрезок от крайней точки до порождающей ее псевдовершины. При этом псевдовершина не является проекцией ни для какой точки биссектрисы.

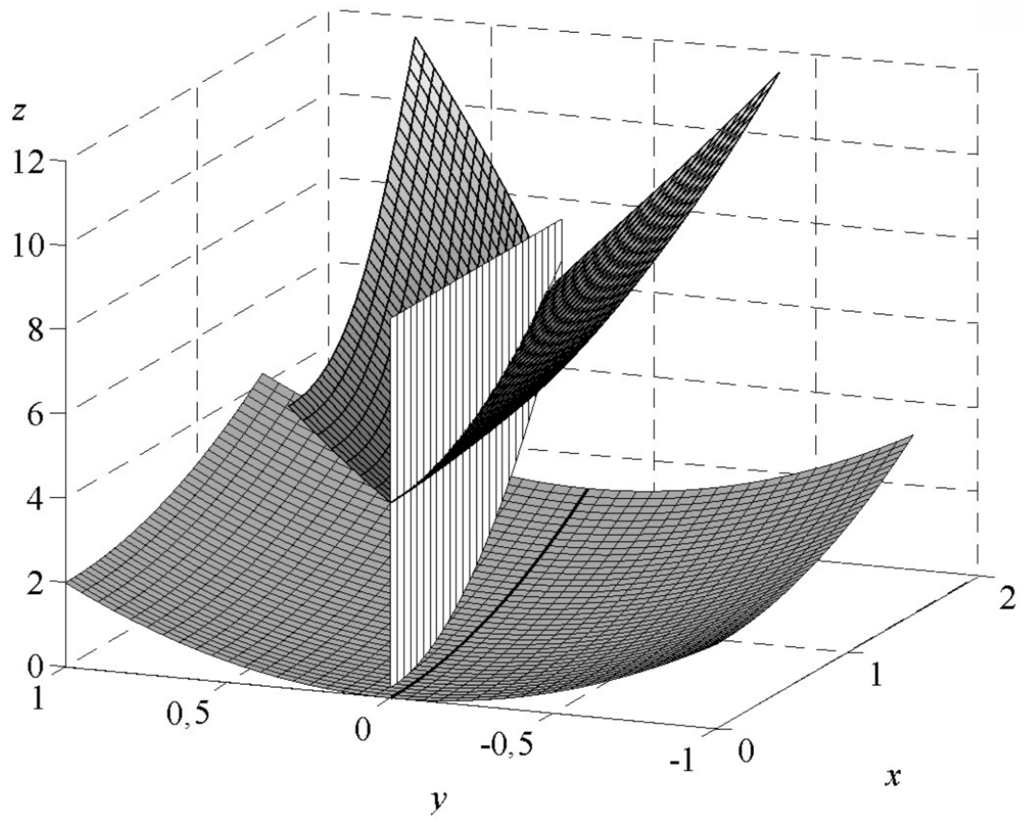

Рис. 2. Граница целевого множество *M* (светло-серая поверхность), множество псевдовершин П (черная кривая) биссектриса *L*(*M*) (белая поверхность) и поверхность уровня Ф(1,5) с меняющимся серым цветом (выполнено авторами с использованием программного комплекса [Лебедев, Успенский 2022]).

Fig. 2. The boundary of the target set M (light grey surface), the set of pseudo-vertexes P (black curve) bisected by L(M) (white surface) and the level surface F (1,5) with a changing grey color

Заключение

Предложены алгоритмы решения задач транспортной логистики, связанных с построением оптимальных траекторий в трехмерном пространстве. Основным элементом алгоритмов является процедура построения сингулярного множества – биссектрисы. В рассматриваемом классе задач биссектриса – нетривиальное множество, объединяющее начальные позиции, из которых исходит не одна, а несколько оптимальных траекторий. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности траектории, связанные с ее расположением относительно биссектрисы. На границе терминального множества выделены характеристические точки, указаны формулы вычисления порожденных ими крайних точек сингулярного множества. Проведено моделирование решения для случая, когда целевое множество в задаче совпадает с подграфиком функции двух переменных в трехмерном евклидовом пространстве.

Список источников

Айзекс Р. Дифференциальные игры / пер. с англ. В. И. Аркина и Э. Н. Симаковой ; под ред. М. И. Зеликина ; с предисл. Л. С. Понтрягина. М. : Мир, 1967. 480 с.

Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия : учебник. 2-е изд., исправл. СПб. : БХВ-Петербург, 2010. 624 с

Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М. : ФАЗИС, 1996. x + 334 с. (Библиотека математика. Вып. 1).

Кружков С. Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона – Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Математический сборник. 1975. Т. 98 (140), № 3 (11). С. 450–493.

Лебедев П. Д., Успенский А. А. Применение множеств симметрии в задачах транспортной логистики // Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 2 (41). С. 31–36.

Лебедев П. Д., Успенский А. А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № RU 2022666810 Российская Федерация. Программа построения решения задачи быстродействия в трехмерном пространстве с шаровой вектограммой скоростей и невыпуклым целевым множеством : № 2022666123 : заявл. 02.09.2022 : опубл. 07.09.2022, Бюл. № 9 / Лебедев П. Д., Успенский А. А. ; заявитель ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН. 1 с.

Лейхтвейс К. Выпуклые множества / пер. с нем. В. А. Залгаллера, Т. В. Хачатуровой ; под ред. В. А. Залгаллера. М. : Наука, 1985. 335 с.

Неруш Ю. М., Саркисов С. В. Транспортная логистика : учебник для вузов. 2-е изд. М. : Юрайт, 2025. 301 с.

Успенский А. А., Лебедев П. Д. Построение сингулярного множества функции оптимального результата в классе пространственных задач управления по быстродействию: случай целевого множества с положительной гауссовой кривизной границы // Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21, № 1. С. 513–525. DOI 10.33048/semi.2024.21.037.

Успенский А. А., Лебедев П. Д. О структуре сингулярного множества решения в одном классе пространственных задач управления по быстродействию // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, вып. 3. С. 471–486.

Sotomayor J., Siersma D., Garcia R. Curvatures of Conflict Surfaces in Euclidean 3-Space // Geometry and topology of caustics : Proceedings of the Banach Center symposium, Warsaw, Poland, June 15-27, 1998 / ed. by S. Janeczko et al. Warsaw : Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, 1999. Vol. 50. P. 277–285. DOI 10.4064/-50-1-277-285.

Информация об авторах

Павел Дмитриевич Лебедев, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия).

Александр Александрович Успенский, д-р физ.-мат. наук, заведующий сектором, ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор АНО ВО «Гуманитарный университет» (Екатеринбург, Россия).

Information about the authors

Pavel D. Lebedev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS) (Yekaterinburg, Russia).

Alexander A. Uspenskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Head of sector, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); prof., Liberal Arts University – University for Humanities (Yekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию | The article was submitted 06.05.2025.
Одобрена после рецензирования | Approved after reviewing 20.05.2025.
Принята к публикации | Accepted 20.05.2025.