

УДК 330.46:517.977

doi:10.35853/vestnik.gu.2025.13-3.03

5.2.3.

Сравнительный анализ игровых равновесных траекторий и репликаторной динамики в моделях инвестиций

Николай Андреевич Красовский¹, Александр Михайлович Тарасьев²

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
n.a.krasovskii@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4313-0799>

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
АНО ВО «Гуманитарный университет», Екатеринбург, Россия,
tam@imm.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8366-9628>

Аннотация. В работе проводится анализ поведения равновесных траекторий двух различных типов в динамических биматричных играх, которые являются адекватными моделями эволюционных процессов, происходящих в экономических и биологических системах. Эволюционная динамика взаимодействия двух игроков описывается системой дифференциальных уравнений с сильно инвариантными свойствами для единичного квадрата на бесконечном временном горизонте. Для рассматриваемой модели исследуются различные типы игрового равновесия. Первый вариант решения порождается подходом, основанным на идее гарантирующих стратегий в смысле Н. Н. Красовского. В рамках этой конструкции строятся равновесные траектории, которые составляют основу динамического равновесия по Нэшу. Во втором варианте равновесные траектории определяются в рамках конструкции репликаторной динамики из теории эволюционных игр – классического инструмента описания конкуренции в моделях экономики и процессах взаимодействия популяций в биологии. В обоих случаях представлены конструкции равновесных траекторий, для которых выполнен сравнительный анализ показателей выигрышей. Проведено исследование трендов траекторий «смешанной» игровой динамики, в рамках которой первый игрок при принятии решений руководствуется гарантирующими принципами, а второй игрок ориентируется на свойства траекторий репликаторной динамики. Результаты сравнительного анализа демонстрируют, что показатели качества траекторий динамического равновесия по Нэшу с гарантирующими стратегиями доминируют над характеристиками траекторий репликаторной динамики. Рассматривается вариант модели инвестиций на финансовых рынках акций и облигаций, на которой демонстрируются результаты построения равновесных траекторий в динамических биматричных играх.

Ключевые слова: оптимальное гарантирующее управление, дифференциальные игры, репликаторная динамика, равновесные траектории, динамические игровые модели инвестиций

Для цитирования: Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Сравнительный анализ игровых равновесных траекторий и репликаторной динамики в моделях инвестиций // Вестник Гуманитарного университета. 2025. Т. 13, № 3. С. 28–40. DOI 10.35853/vestnik.gu.2025.13-3.03.

Comparative Analysis of Game Equilibrium Trajectories and Replicator Dynamics in Models of Investments

Nikolay A. Krasovskii¹, Alexander M. Tarasyev²

¹N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia, n.a.krasovskii@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4313-0799>

²N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); Liberal Arts University – University for Humanities, Yekaterinburg, Russia, tam@imm.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8366-9628>

Abstract. The paper provides an analysis for the behavior of equilibrium trajectories of two various types in dynamic bimatrix games, which are adequate models of evolutionary processes occurring in economic and biological systems. The model, which describes the players' interaction, is given by differential equations with control parameters. The game dynamics has the property of strong invariance with respect to the space of the game given by unit square. Different types of game equilibria are studied for the considered dynamic model. The first type of equilibrium is obtained within the theory of differential games and based on the concept of guaranteed strategies proposed by N.N. Krasovskii. In this case, equilibrium trajectories are generated by guaranteed feedbacks and form the basic construction for the dynamic Nash equilibrium. In the second variant, equilibrium trajectories are determined on the basis of ideas of replicator dynamics from the theory of evolutionary games – a classic tool for describing competition in economic models and processes of population interaction in biology. In both cases, the designs of equilibrium trajectories are presented, for which a comparative analysis of the payoff indices is performed. A study was conducted for the trends of the trajectories of “mixed” game dynamics, within which the first player is guided by the guaranteed principles when making decisions and the second player is guided by the properties of trajectories of the replicator dynamics. The results of the comparative analysis demonstrate that the quality indices of the dynamic Nash equilibrium with guaranteed strategies dominate the characteristics of the replicator dynamics. A variant of the investment model on the financial markets of stocks and bonds is considered, which demonstrates the results of constructing equilibrium trajectories in dynamic bimatrix games.

Keywords: optimal guaranteed control, differential games, replicator dynamics, equilibrium trajectories, dynamic game models of investments

For citation: Krasovskii NA, Tarasyev AM. Comparative Analysis of Game Equilibrium Trajectories and Replicator Dynamics in Models of Investments. *Vestnik Gumanitarnogo universiteta* = *Bulletin of Liberal Arts University*. 2025;13(3):28-40. (In Russ.). DOI:10.35853/vestnik.gu.2025.13-3.03.

Введение

Работа продолжает исследование [Красовский Н. А., Тарасьев 2023], в котором проводилось сравнение поведения равновесных траекторий, порожденных гарантирующими стратегиями управления в смысле Н. Н. Красовского [Красовский Н. Н. 1985; Красовский Н. Н., Субботин 1974; Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. 1995], и траекторий динамики наилучших ответов игроков [Интрилигатор 2002] в динамической биматричной игре.

В данной статье проводится сравнительный анализ трендов траекторий для гарантирующих стратегий и траекторий репликаторной динамики, широко применяемой в теории эволюционных игр [Братусь, Дрожжин, Якушкина 2022; Hofbauer, Sigmund 1988; Krasovskii N. A., Tarasyev 2024]. Теория динамических биматричных игр на бесконечном временном горизонте [Воробьев 1985; Basar, Olsder 1982] используется для изучения поведения равновесных траекторий. В качестве примера биматричной игры представлена модель игры на финансовых рынках акций и облигаций двух коалиций игроков, которые осуществляют оптимизацию инвестиционных портфелей.

В первой части работы проводится исследование конструкции эволюционной игры двух участников, динамика которой описывается управляемой системой дифференциальных уравнений. Показатели выигрышей игроков определяются предельными значениями на траекториях динамической игры на бесконечном интервале времени. Игровая задача решается с помощью аппарата теории оптимального управления [Математическая теория оптимальных процессов 1961] и дифференциальных игр с конструкциями гарантирующих стратегий, предложенных академиком Н. Н. Красовским [Красовский Н. Н. 1985; Красовский Н. Н., Субботин 1974; Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. 1995]. Понятие динамического равновесия по Нэшу [Клейменов 1993] адаптировано к игровой модели, для которой также построены функции цены, позиционные стратегии игроков и равновесные траектории [Субботин, Тарасьев 1985; Красовский Н. А., Кряжковский, Тарасьев 2014; Красовский Н. А., Тарасьев 2015].

Второй раздел работы связан с исследованием поведения репликаторной динамики в рассматриваемой биматричной игре. Концепция репликаторной динамики заключается в согласовании темпов роста группы в популяции с разностью между значением фитнеса этой группы и среднего фитнеса по популяции. Таким образом, нелинейные уравнения репликаторной динамики отражают принцип естественного отбора в стратегических взаимодействиях. Траектории репликаторной динамики могут демонстрировать различные тренды, в том числе устойчивую сходимость к положению равновесия, циклический характер в области, связанной с точкой статического равновесия по Нэшу, и наличие бифуркаций.

Для иллюстрации результатов исследований изучается игровая модель, которая отражает поведение двух групп игроков («быков» и «медведей») на финансовых рынках акций и облигаций. Для формирования параметров матрицей выигрышей игроков выполнен анализ показателей доходности инвестиций в виде процентных ставок, основанный на реальных данных [Wiltermuth 2023]. Коэффициенты матрицей выигрышей используются для построения гарантирующих стратегий управления игроками в соответствии с подходом Н. Н. Красовского и для конструирования траекторий репликаторной динамики. Проводится сравнение качества управлений в обоих методах на основе значений функционалов выигрышей, рассчитанных на равновесных траекториях.

Третий раздел статьи посвящен исследованию так называемой конструкции «смешанной» динамики. В такой динамике первый игрок использует гарантирующие стратегии при построении управлений, а второй игрок руководствуется концепциями репликаторной динамики. В результате проведенного сравнительного анализа показано, что значения функционалов выигрышей игроков на траекториях «смешанной» динамики доминируют над значениями функционалов репликаторной динамики.

Структура эволюционной игры

Проводится анализ системы дифференциальных уравнений, моделирующей динамический процесс активности двух игроков на рынках акций и облигаций:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), & x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = -y(t) + v(t), & y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь параметры x , $0 \leq x \leq 1$ и y , $0 \leq y \leq 1$ определяют уровень инвестиционных вложений (в процентах) в два различных типа активов (например, акций и облигаций): нулевые значения $x = 0$, $y = 0$ отвечают нулевому значению вложений в рынок акций и стопроцентному уровню вложения в рынок облигаций для первого и второго игроков соответственно.

Параметры $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ задают скорости перемещения средств из одного рынка в другой. Иной интерпретацией параметров $x = x(t)$, $y = y(t)$ может быть вероятность выбора вложений в рынки акций и облигаций двумя игроками. Такая интерпретация соответ-

ствует концепции смешанных стратегий игроков в классических биматричных играх [Воробьев 1985].

Параметры u и v соответствуют требованиям $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ и выступают в роли сигналов, указывающих игрокам на необходимость изменения стратегии. Так, сигнал $u = 0$ ($v = 0$) означает команду: «отказаться от первой стратегии в пользу второй», иными словами – перераспределить часть инвестиций путем перевода средств с фондового рынка (рынка акций) в рынок облигаций. Смысл сигнала $u = 1$ ($v = 1$) заключается в следующем: «необходимо заменить вторую стратегию первой», иначе говоря – изменить структуру вложений, переведя часть капитала с рынка облигаций на рынок акций. Сигнал $u = x$ ($v = y$) означает, что нужно придерживаться ранее выбранной стратегии, сохраняя прежние доли активов в инвестиционном портфеле, который включает акции и облигации.

«Локальные» показатели качества определяются как математические ожидания выигрышей, определяемые матрицами $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$ в рамках биматричной игры, и отражают текущие интересы игроков в момент времени T :

$$g_A(x(T), y(T)) = C_A x(T) y(T) - \alpha_1 x(T) - \alpha_2 y(T) + a_{22}. \quad (2)$$

Характеристики C_A , α_1 , α_2 матрицы A определяются согласно положениям статической теории биматричных игр [Воробьев 1985; Basar, Olsder 1982]:

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \quad (3)$$

$$\alpha_1 = a_{22} - a_{12}, \quad \alpha_2 = a_{22} - a_{21}, \quad (4)$$

Показатель качества g_B второго игрока, а также характеристики C_B , β_1 , β_2 матрицы B задаются аналогичным способом.

«Глобальные» J_A^∞ интересы первого игрока задаются верхним и нижним пределами средних величин $g_A(x(T), y(T))$ на бесконечном временном интервале и в отличие от «локальных» интересов ориентированы на «долгосрочные» и устойчивые во временном смысле показатели:

$$J_A^\infty = [J_A^-, J_A^+], \quad (5)$$

$$J_A^- = \liminf_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)), \quad (6)$$

$$J_A^+ = \limsup_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)). \quad (7)$$

Интересы J_B^∞ второго игрока задаются аналогичным способом.

Анализ данной эволюционной игры осуществляется методами теории оптимального управления [Математическая теория оптимальных процессов 1961] и теории дифференциальных игр [Красовский Н. Н., Субботин 1974]. Согласно подходу, изложенному в работе [Клейменов 1993], концепция динамического равновесия по Нэшу формулируется применительно к классу позиционных стратегий (обратных связей) $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$, т. е. функций, зависящих не только от времени t , но и от текущих инвестиционных вложений $x = x(t)$, $y = y(t)$. Параметр ε играет роль меры чувствительности позиционных стратегий в процессе принятия решений по инвестициям. Дадим формулировку динамического равновесия по Нэшу.

Определение 1.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Пара обратных связей $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$ называется равновесием по Нэшу для начального положения (x_0, y_0) , если для любых других обратных связей $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$ справедливо следующее условие: неравенства

$$J_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq J_A^+(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) - \varepsilon, \quad (8)$$

$$J_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq J_B^+(x_2(\cdot), y_2(\cdot)) - \varepsilon \quad (9)$$

выполняются для всех траекторий

$$\begin{aligned} (x^0(\cdot), y^0(\cdot)) &\in X(x_0, y_0, U^0, V^0), \\ (x_1(\cdot), y_1(\cdot)) &\in X(x_0, y_0, U, V^0) \\ (x_2(\cdot), y_2(\cdot)) &\in X(x_0, y_0, U^0, V). \end{aligned}$$

Здесь символ X обозначает множество траекторий, которые стартуют из начальной позиции (x_0, y_0) и генерируются соответствующими стратегиями (U^0, V^0) , (U, V^0) , (U^0, V) .

Хорошо известна конструкция [Клейменов 1993], согласно которой динамическое равновесие по Нэшу можно сформировать путем объединения решений двух антагонистических игр, в которых каждый игрок строит гарантированные «положительные» обратные связи u_A^0, v_B^0 при максимизации своих выигрышей и «наказывающие» обратные связи u_B^0, v_A^0 при минимизации выигрыша конкурента:

$$\begin{aligned} U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon) &= \begin{cases} u_A^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ u_B^0(x, y), & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon) &= \begin{cases} v_B^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ v_A^0(x, y), & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Конструкция «положительных» обратных связей

При формировании динамического равновесия по Нэшу основное значение имеют обеспечивающие гарантированный результат «положительные» обратные связи u_A^0, v_B^0 , максимизирующие функции g_A, g_B на неограниченном временном интервале $T \rightarrow \infty$. С этой целью конструируются специальные функции цены w_A, w_B для игр с нулевой суммой на бесконечном горизонте. Напомним, что функциями цены называются функции, которые определены на текущих позициях (x, y) игры и ставят им в соответствие оптимальные гарантированные значения выигрышей игроков $w_A(x, y), w_B(x, y)$. В некотором смысле, функции цены выполняют роль функций Ляпунова, известных в теории устойчивости, и их обобщенные производные в силу системы являются инструментом для построения «положительных» стратегий управления.

Оказывается, что аналитическая структура функции цены определяется с помощью обобщенного метода характеристик для уравнений Гамильтона – Якоби, соответствующих данной эволюционной игре. Показано, что при условии $C_A > 0$ функция цены w_A может быть представлена комбинацией четырех функций:

$$w_A(x, y) = \psi_A^i(x, y), \quad \text{если } (x, y) \in E_A^i, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (10)$$

$$\psi_A^1(x, y) = a_{22} - \frac{(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2}{4C_A xy}, \quad (11)$$

$$\psi_A^2(x, y) = a_{11} - \frac{((C_A - \alpha_1)(1 - x) + (C_A - \alpha_2)(1 - y))^2}{4C_A(1 - x)(1 - y)}, \quad (12)$$

$$\psi_A^3(x, y) = C_A xy - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22}, \quad (13)$$

$$\psi_A^4(x, y) = \frac{a_{22}C_A - \alpha_1\alpha_2}{C_A} = v_A. \quad (14)$$

Отметим, что значение v_A является ценой статической антагонистической игры с матрицей A .

Оказывается, что функция цены представляет собой склейку гладких компонент $\psi_A^i(x, y)$, $i = 1, \dots, 4$ (10-14). Часть из этих склеек являются гладкими, т. е. градиенты гладких компонент на них совпадают. Имеются также линии непрерывной, но негладкой склейки, на которых градиенты гладких компонент отличаются друг от друга. Эти линии склейки компонент ψ_A^1 и ψ_A^4 и компонент ψ_A^2 и ψ_A^4 генерируют так называемую линию K_A переключения стратегий оптимального гарантированного управления («позитивного» управления) для первого игрока:

$$\begin{aligned} K_A &= K_A^1 \cup K_A^2, \\ K_A^1 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \frac{\alpha_1}{C_A} \leq y \leq 1, y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x\}, \\ K_A^2 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, 0 \leq y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}, \\ &\quad y = -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для аккуратного описания «позитивной» стратегии введем в рассмотрение область D_A , порожденную линией переключения K_A , такую, что значение гарантирующего управления в ней равно единице, $u = 1$:

$$D_A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y \geq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x, y \geq -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1\}.$$

Линия переключения K_A делит квадрат возможных состояний на две части: область D_A и ее дополнение. Поэтому гарантирующая стратегия первого игрока, порожденная линией переключения K_A , строится по следующему правилу:

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in D_A, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (16)$$

Функция цены $w_B(x, y)$, линия переключения $K_B = K_B^1 \cup K_B^2$ и гарантирующая стратегия $v = v(x, y)$ для второго игрока с матрицей выигрышей B строятся аналогичным образом.

Доказывается, что построенная функция w_A действительно представляет собой функцией цены эволюционной антагонистической игры, так как обладает свойствами u -стабильности и v -стабильности [Красовский Н. Н. 1985; Красовский Н. Н., Субботин 1974; Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. 1995]. Это означает выполнение следующих неравенств для сопряженных производных [Субботин, Тарасьев 1985]:

$$D_* w_A(x, y) | s \leq H(x, y, s), \quad D^* w_A(x, y) | s \geq H(x, y, s)$$

и неравенства связи для функции цены w_A и функции выигрыша g_A .

$$\begin{aligned} w_A(x, y) &\leq g_A(x, y), \\ (x, y) &\in (0, 1) \times (0, 1), \quad s = (s_1, s_2) \in R^2. \end{aligned}$$

Здесь сопряженные производные $D_* w_A$ и $D^* w_A$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} D^* w_A(x, y) | s &= \sup_{h \in R^2} (\langle s, h \rangle - \partial_- w_A(x, y) | (h)), \\ D_* w_A(x, y) | s &= \inf_{h \in R^2} (\langle s, h \rangle - \partial_+ w_A(x, y) | (h)). \end{aligned}$$

Гамильтониан уравнения Гамильтона – Якоби для рассматриваемой эволюционной антагонистической игры задается соотношением:

$$H(x, y, s) = -s_1x - s_2y + \max\{0, s_1\} + \min\{0, s_2\}.$$

Рисунок 1 демонстрирует структуру функции цены w_A в мультитерминальной постановке задачи применительно к первому игроку. Для ситуации, когда $C_A = 5$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, показаны линии KA_j , $j = 1, \dots, 5$ и области EA_1 , EA_2 , $EA_3 = EA_{31} \cup EA_{32}$, $EA_4 = EA_{41} \cup EA_{42}$, в которых функция цены w_A принимает значения гладких составляющих ψ_A^i , $i = 1, \dots, 4$.

Конструкция функции цены w_B для второго игрока формируется аналогичным образом путем поворота игрового квадрата на угол 90° .

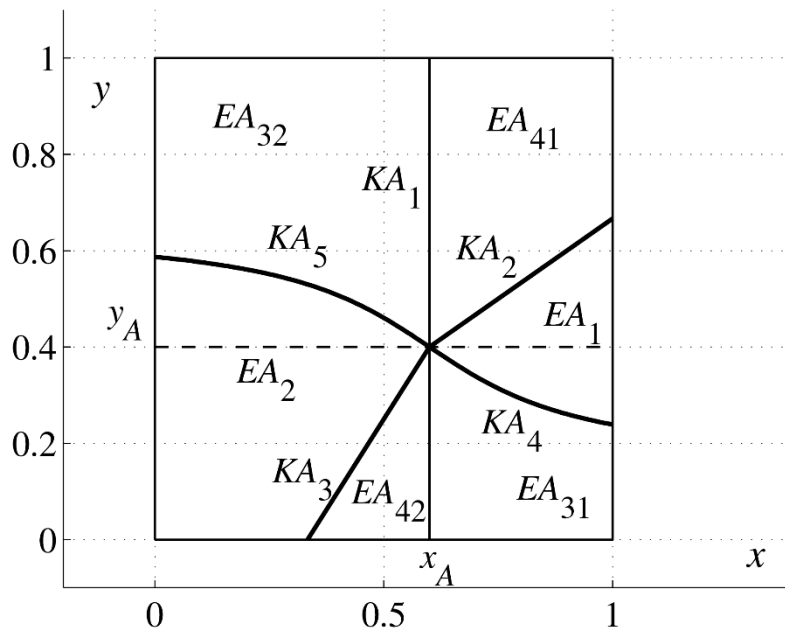


Рис. 1. Склейка гладких компонент ψ_A^i для функции цены w_A в мультитерминальной задаче¹

Fig. 1. The Connection of Smooth Components ψ_A^i to the Price Function w_A in a Multi-terminal Problem

Концепция репликаторной динамики

В данной секции проводится анализ репликаторной динамики, которая используется для описания процессов эволюции в популяциях, где особи могут воспроизводить себя (или свои характеристики). Аналогичная интерпретация репликаторной динамики дается и для описания взаимодействия больших групп игроков рынка в экономических системах. Концепция репликаторной динамики заключается в согласовании темпов роста группы в популяции с разностью между значением фитнеса этой группы и среднего фитнеса по популяции и может быть представлена в виде:

$$\dot{p}_i = p_i (f_i(p) - \bar{f}), \quad (17)$$

где p_i – доля репликатора i в популяции; f_i – фитнес репликатора i ; $\bar{f} = \sum_{j=1}^n p_j f_j(p)$ – средний фитнес всей популяции.

В биологии термин «репликатор» используется для обозначения молекулы или структуры, способной самостоятельно воспроизвести свое строение путем копирования генетической информации. Классическим примером биологического репликатора является молекула ДНК, которая способна удвоиться перед делением клетки, обеспечивая передачу наследственной информации следующему поколению клеток. Кроме

¹ Составлено авторами.

ДНК существуют и другие типы репликаторов, например РНК-вирусы, способные к саморепликации внутри живых организмов-хозяев.

Репликатором в экономике называют идею, технологию, стратегию поведения или бизнес-модель, которая легко распространяется среди экономических агентов (например, компаний или потребителей), демонстрируя высокую степень адаптации и конкурентоспособности. Экономический репликатор играет важную роль в формировании рыночных тенденций и стимулирует развитие технологий и стратегий управления бизнесом.

Понятие фитнеса связано со способностью репликатора к воспроизведению. Чем выше фитнес, тем больше копий данного репликатора будет создано в следующем поколении.

Представим понятие репликаторной динамики для динамической биматричной игры:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(g_A(1, y) - g_A(x, y)), \\ \dot{y} = y(g_B(x, 1) - g_B(x, y)). \end{cases} \quad (18)$$

Напомним, что здесь x , $(1 - x)$ и y , $(1 - y)$ – доли капитала, вкладываемые в соответствующие рынки акций или облигаций, для двух игроков. Фитнес соответствующего типа (фитнес i -го игрока при вложении всего капитала в первый проект) определяется формулами

$$g_A(1, y) = \sum_{j=1}^2 a_{1j} y_j, \quad y_1 = y, \quad y_2 = (1 - y), \quad (19)$$

$$g_B(x, 1) = \sum_{j=1}^2 b_{j1} x_j, \quad x_1 = x, \quad x_2 = (1 - x). \quad (20)$$

Средние значения фитнеса определяются как математические ожидания выигрышей, заданных соответствующими матрицами A и B : $g_A(x, y)$, $g_B(x, y)$ (2).

Отметим, что система (18) соответствует одному из основных принципов дарвинизма: репродуктивный успех особи или группы зависит от превосходства собственной приспособляемости над средней приспособляемостью популяции к среде обитания.

Для динамической биматричной игры размерности 2×2 репликаторную динамику можно переписать в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(1 - x(t))(C_A y(t) - \alpha_1), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = y(t)(1 - y(t))(C_B x(t) - \beta_2), \quad y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (21)$$

Следует отметить, что выражения в правой части динамики (21) связаны с компонентами градиентов функций выигрыша $g_A(x, y)$, $g_B(x, y)$:

$$\frac{\partial g_A}{\partial x} = C_A y - \alpha_1, \quad \frac{\partial g_B}{\partial y} = C_B x - \beta_2.$$

Таким образом, динамика (21) ориентирована на учет краткосрочных интересов игроков, задаваемых компонентами градиентов $\frac{\partial g_A}{\partial x}$, $\frac{\partial g_B}{\partial y}$. При этом компоненты $x(1 - x)$ в первом уравнении и $y(1 - y)$ во втором уравнении динамики (21) обеспечивают удержание траектории $x(t)$, $y(t)$ репликаторной динамики в единичном квадрате, т. е. единичный квадрат является сильно инвариантным множеством по отношению к репликаторной динамике на бесконечном временном горизонте.

Модель инвестиций на финансовых рынках

В качестве иллюстрации применимости динамической биматричной игры рассматривается модель инвестиций на фондовом рынке ценных бумаг. Участники данной модели выступают в роли групп инвесторов, известных в финансовых кругах как «быки» – первый игрок, и «медведи» – второй игрок. Матрицы выигрышей указанных коалиций формируются на основе сведений о фондовом рынке (рынке акций) и рынке облигаций Соединенных Штатов Америки [Wiltermuth 2023].

Матрица A отражает стратегию поведения инвесторов, ориентированных на рост рыночных котировок и известных как «быки». Матрица B демонстрирует тактику участников торгов, играющих на снижение рыночных показателей и известных как «медведи». Элементы матриц определяются уровнем доходности акций и облигаций относительно рыночных тенденций «быков» и «медведей», выраженных в процентных значениях. Например, первая строка матрицы A отражает уровень прибыльности инвестиций «быков», когда они вкладывают средства в рынок акций. Первый элемент a_{11} данной строки показывает прибыль инвесторов-«быков», одновременно вкладывающих средства вместе с «медведями» в рынок акций. Второй элемент a_{12} этой строки показывает прибыльность операций инвесторов-«быков» на рынке акций при вложении инвесторов-«медведей» в рынок облигаций. Вторая строка матрицы A задает показатели доходности «быков» при их инвестиционных вложениях в рынок облигаций. Первая компонента a_{21} этой строки равна доходности «быков» при их вложении в рынок облигаций и вложении «медведей» в рынок акций. Вторая компонента второй строки a_{22} соответствует доходности «быков» при одновременном вложении «быков» и «медведей» в рынок облигаций. Компоненты матрицы B задаются аналогично для доходностей коалиции «медведей». При этом считается, что выбором строчек матрицы B распоряжается коалиция «быков», а выбор столбцов матрицы B контролирует коалиция «медведей».

На основе данных [Wiltermuth 2023] получены оценки доходностей для коэффициентов матриц A и B . Данные матрицы и их ключевые характеристики определяются следующими значениями:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1,75 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$C_A = 11,25, \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1,25, \quad x_A = 0,11, \quad y_A = 0,27,$$

$$C_B = -17,5, \quad \beta_1 = -2,5, \quad \beta_2 = -9,5, \quad x_B = 0,54, \quad y_B = 0,14.$$

Построение решений в модели инвестиций

В данном разделе на основе предложенной модели эволюционной игры и репликаторной динамики конструируются равновесные траектории и осуществляется сопоставление показателей выигрышей игроков в точках равновесия.

Сначала рассмотрим структуру, обеспечивающую гарантирующие «позитивные» обратные связи. На рисунке 2 изображены линия переключения для гарантирующих стратегий управления первого игрока $K_A = K_A^1 \cup K_A^2$, а также скорости векторного поля для первого игрока в игре с долгосрочными интересами, которые определяются глобальным предельным функционалом J_A^∞ (5).

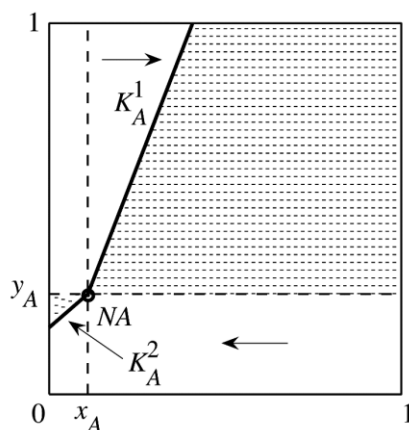


Рис. 2. Векторное поле скоростей, соответствующее интересам первого участника в стратегической игре с длительным горизонтом планирования²

Fig. 2. The Velocity Vector Field Corresponding to the Interests of the Primary Participant in a Long-term Strategic Game

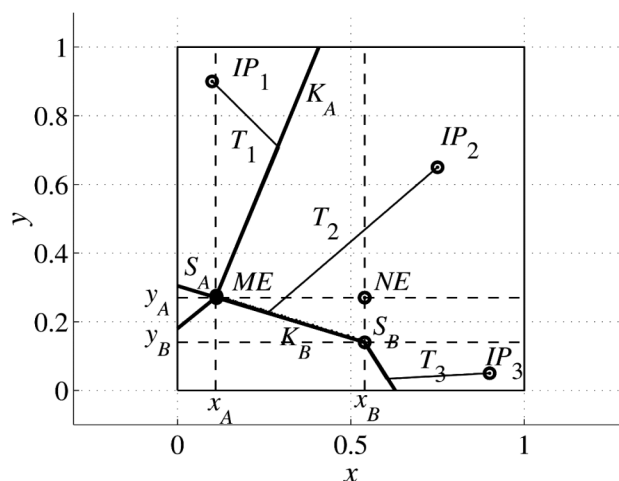


Рис. 3. Траектории, порожденные линиями переключения управлений в конструкции динамического равновесия по Нэшу³

Fig. 3. Trajectories generated by control switching lines in the construction of dynamic equilibrium according to Nash

На рисунке 3 изображены седловые точки S_A и S_B статической игры, точка статического равновесия по Нэшу NE , а также линии переключения K_A и K_B управлений первого и второго игрока соответственно. Эти линии порождены функциями цены w_A и w_B . Представлены равновесные траектории динамического равновесия по Нэшу T_1 , T_2 и T_3 , которые начинают свое движение из начальных точек IP_1 , IP_2 и IP_3 , двигаются вдоль характеристик уравнений Гамильтона – Якоби, встречаются с линиями переключения, на которых движение принимает характер скользящего режима. В итоге траектории сходятся к точке динамического равновесия по Нэшу ME , которое можно назвать «рыночным равновесием».

² Составлено авторами.

³ Составлено авторами.

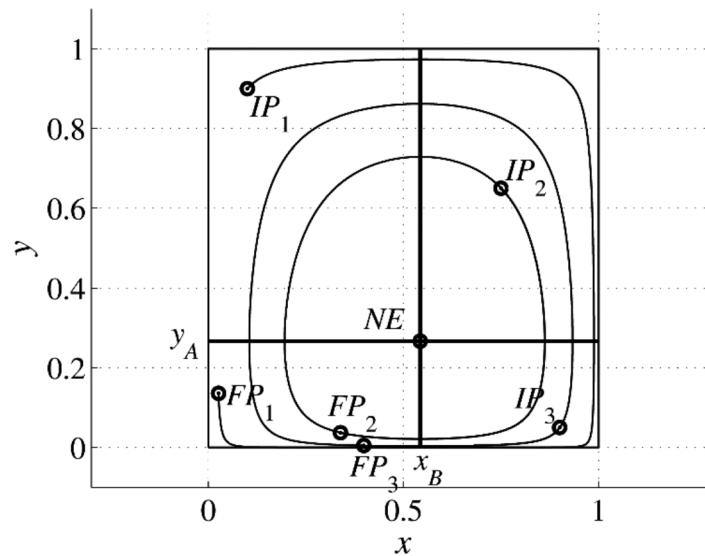


Рис. 4. Равновесные траектории, порожденные репликаторной динамикой⁴
Fig. 4. Equilibrium Trajectories Generated by Replicator Dynamics

Продemonстрируем результаты моделирования равновесных траекторий, порожденных репликаторной динамикой (21). На рисунке 4 показаны траектории репликаторной динамики, которые начинают движение из точек IP_1 , IP_2 и IP_3 , расположенных в качественно различных областях начальных условий игры. Хотя траектории стартуют из различных начальных точек, все они представляют собой циклы, центрированные вокруг точки статического равновесия по Нэшу NE .

Значения показателей качества в точке рыночного равновесия ME равны следующим значениям, выраженным в процентах: $g_A(ME) = 2,68$, $g_B(ME) = 2,8$. Эти показатели превышают доходность игроков в точке статического равновесия по Нэшу NE : $g_A(ME) = 2,68$, $g_B(ME) = 1,68$.

Значения функционалов (2), вычисленные по траекториям репликаторной динамики, существенно проигрывают показателям качества в точке статического равновесия по Нэшу NE и, соответственно, оказываются меньше показателей в точке рыночного равновесия ME . Например, на траектории, которая стартует из начальной точки $IP_2(0,75;0,65)$, гарантированное значение функционала g_A равняется: $\liminf_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)) = 1,0$, и гарантированное значение функционала g_B равняется: $\liminf_{t \rightarrow \infty} g_B(x(t), y(t)) = -0,11$, т. е. выходит в отрицательное значение ставок доходности портфелей.

Конструкция «смешанной» динамики

Данный раздел посвящен изучению динамики смешанного типа, представляющей собой комбинацию гарантирующих стратегий и репликаторной динамики. Иначе говоря, рассматривается ситуация, в которой первый участник применяет гарантирующую стратегию $u_g(t) = u(x(t), y(t))$ (16) с линией переключения KA (15), а стратегия второго игрока формируется уравнениями репликаторной динамики (21). Таким образом, «смешанная» динамика определяется системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u_g(t), & x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = -y(t)(1 - y(t))(C_B x(t) - \beta_2), & y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

На рисунке 5 демонстрируются точка статического равновесия по Нэшу NE , линия переключения K_A управления первого игрока, порожденная функцией цены w_A , линия переключения $x = x_B$ управления второго игрока, заданная репликаторной динамикой. Равновесные траектории «смешанной» динамики T_1 , T_2 и T_3 начинают движение из на-

⁴ Составлено авторами.

чальных точек IP_1 , IP_2 и IP_3 . Двигаясь вдоль характеристик уравнений Гамильтона – Якоби, они встречаются с линиями переключения, на которых меняют направление и сходятся к конечной точке FP .

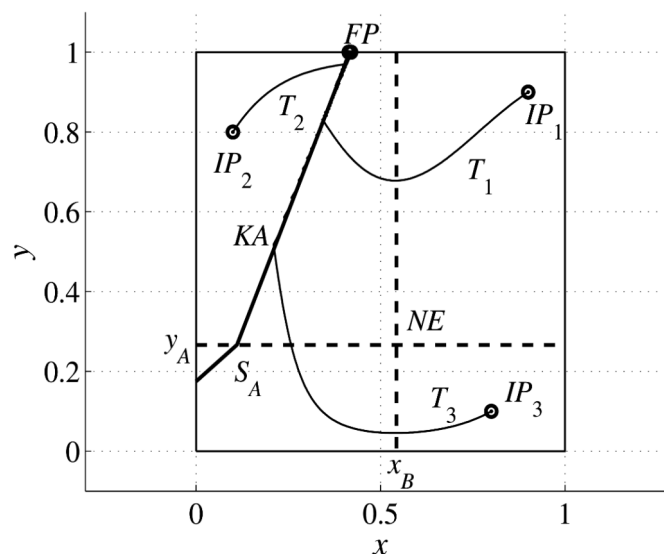


Рис. 5. Фазовый график равновесных траекторий гибридной динамической системы⁵
Fig. 5. The Phase Diagram of Equilibrium Trajectories of a Hybrid Dynamic System

Значения показателей качества игроков в конечной точке FP равновесных траекторий динамики смешанного типа выражаются следующими величинами в процентах:

$$g_A(FP) = 5,29, g_B(FP) = 3,55.$$

Указанные величины превосходят соответствующие значения в точке окончания движения равновесных траектории динамического равновесия по Нэшу и тем более превосходят показатели качества равновесных траекторий репликаторной динамики.

Заключение

В работе проведено сравнение двух различных подходов к построению равновесных траекторий в динамических биматричных играх. В первом подходе рассматриваются гарантирующие стратегии управления на основе конструкций, предложенных Н. Н. Красовским. Во втором подходе исследуется поведение траекторий репликаторной динамики, широко известной в теории эволюционных игр. Показано, что гарантирующие стратегии обеспечивают доминирование значений показателей качества над траекториями репликаторной динамики. Выполнено исследование особенностей движения траекторий в динамике смешанного типа, где первый участник применяет гарантирующие стратегии, тогда как второй придерживается правил репликаторной динамики. Гарантирующие стратегии показывают свое преимущество в условиях «смешанной» динамики благодаря способности осуществлять прогнозирование, тогда как репликаторная динамика основана на менее дальновидном подходе к принятию решений. Для демонстрации результатов используется динамическая инвестиционная модель, действующая на рынке акций и облигаций.

Список источников

- Братусь А. С., Дрожжин С. В., Якушкина Т. С. Математические модели эволюции и динамики репликаторных систем. М. : УРСС, 2022. 265 с.
Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М. : Наука, 1985. 272 с.

⁵ Составлено авторами.

- Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / пер. с англ. Г. И. Жуковой, Ф. Я. Кельмана. М. : Айрис-Пресс, 2002. 553 с.
- Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург : Наука, 1993. 185 с.
- Красовский Н. А., Кряжмский А. В., Тарасьев А. М. Уравнения Гамильтона – Якоби в эволюционных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 114–131.
- Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Гарантирующие стратегии управления и динамика наилучших ответов в игровых инвестиционных моделях // Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 3 (42). С. 7–16. DOI 10.35853/vestnik.gu.2023.3(42).01.
- Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Равновесные решения в динамических играх. Екатеринбург : УрГАУ, 2015. 128 с.
- Красовский Н. Н. Управление динамической системой : Задача о минимуме гарантированного результата. М. : Наука, 1985. 520 с.
- Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974. 455 с.
- Математическая теория оптимальных процессов : монография / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М. : Физматгиз, 1961. 391 с.
- Субботин А. И., Тарасьев А. М. Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.
- Başar T., Olsder G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory. London ; New York : Academic Press, 1982. 429 p.
- Hofbauer J., Sigmund K. The Theory of Evolution and Dynamical Systems: Mathematical Aspects of Selection. Cambridge etc. : Cambridge University Press, 1988. 352 p.
- Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control Under Lack of Information. Boston etc. : Birkhäuser, 1995. xii, 322 p.
- Krasovskii N. A., Tarasyev A. M. Trajectories of dynamic equilibrium and replicator dynamics in coordination games // Ural Mathematical Journal. 2024. Vol. 10, no. 2. P. 92–106. DOI 10.15826/umj.2024.2.009.
- Wiltermuth J. Investors are the most bullish on stocks since before the 2022 bear market, says Vanguard // MarketWatch : website. 2023. July 19. URL: <https://www.marketwatch.com/story/investors-are-the-most-bullish-on-stocks-since-before-the-2022-bear-market-says-vanguard-56720a98> (access date: 20.07.2023).

Информация об авторах

Николай Андреевич Красовский, канд. физ.-мат. наук, математик 1-й категории, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия).

Александр Михайлович Тарасьев, д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом динамических систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; профессор, кафедра менеджмента и маркетинга, АНО ВО «Гуманитарный университет» (Екатеринбург, Россия).

Information about the authors

Nikolay A. Krasovskii, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), mathematician of the 1st category, Department of Dynamic Systems, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS) (Yekaterinburg, Russia).

Alexander M. Tarasyev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Head of the Department of Dynamic Systems, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS); professor at Management and Marketing Department, Liberal Arts University – University for Humanities (Yekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию | Submitted 19.05.2025.

Одобрена после рецензирования | Revised 19.05.2025.

Принята к публикации | Accepted 29.05.2025.