

УДК 339.18+519.866
doi:10.35853/vestnik.gu.2026.14-3.02
5.2.3.

Алгоритмы оптимальной расстановки логистических объектов различного размера на плоскости

Павел Дмитриевич Лебедев¹, Александр Александрович Успенский²

¹ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия, pleb@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

²ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
АНО ВО «Гуманитарный университет», Екатеринбург, Россия,
uspen@imm.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

Аннотация. Исследуется задача о построении оптимальной расстановки логистических центров на плоской области. В качестве критерия оптимальности выбрана минимизация расстояния от произвольной точки множества до ближайшего из центров. Предложены алгоритмы, основанные на разбиении множества на области влияния центров. Используются конструкции чебышёвского центра.

Ключевые слова: функция затрат, евклидово расстояние, хаусдорфово отклонение, чебышёвский центр

Для цитирования: Лебедев П. Д., Успенский А. А. Алгоритмы оптимальной расстановки логистических объектов различного размера на плоскости // Вестник Гуманитарного университета. 2026. Т. 14, № 3. С. 13–19. DOI 10.35853/vestnik.gu.2026.14-3.02.

Algorithms for Optimal Arrangement of Differently Sized Logistics Objects on a Plane

Pavel D. Lebedev¹, Alexander A. Uspenskii²

¹N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia, pleb@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

²N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Liberal Arts University – University for Humanities, Yekaterinburg, Russia, uspen@imm.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

Abstract. The paper examines the problem of constructing an optimal arrangement of logistics centers on a flat domain. Minimizing the distance from an arbitrary point in the set to the nearest center is chosen as the optimality criterion. The authors propose algorithms based on partitioning the set into regions of influence of the centers. The study employs the Chebyshev center constructions.

Keywords: cost function, Euclidean distance, Hausdorff deviation, Chebyshev center

For citation: Lebedev PD, Uspenskii AA. Algorithms for Optimal Arrangement of Differently Sized Logistics Objects on a Plane. *Vestnik Gumanitarnogo universiteta = Bulletin of Liberal Arts University*. 2026;14(3):13-19. (In Russ.). DOI:10.35853/vestnik.gu.2026.14-3.02.

Введение

Важность задач о наилучшей расстановке логистических центров на заданной территории обусловлена их распространенностью в экономике, транспортном проектировании и менеджменте. Обычно система управления состоит из разветвленной сети

пунктов, которые можно располагать различным образом, но свойства каждого из них заданы. Часто требуется составить сеть объектов, которая обеспечивала бы минимум расстояния от произвольной точки заданной области до ближайшего из центров с запасами. Это сводится к минимизации хаусдорфова отклонения плоской фигуры от подвижных множеств, что в разном виде исследовалось, например, в работах [Ушаков, Лахтин, Лебедев 2014; Лебедев, Успенский, Ушаков 2020]. В похожей постановке изучались также задачи о расстановке датчиков (см.: [Астраков, Квашнин, Короленко 2017]).

Постановка задачи и методы решения

Полагаем, что задана плоская выпуклая область M . Для нее надо построить систему из n центров управления, представляющих из себя выпуклые компакты $P_i, i = 1, \dots, n$. При этом будем называть ε -окрестностью компакта M множество $M + O(\mathbf{0}, \varepsilon)$, где $O(\mathbf{x}, \varepsilon)$ – круг радиуса ε с центром в точке $\mathbf{x}$, $\mathbf{0}$ – нулевой вектор.

Задача. Пусть задано замкнутое множество $M \subset \mathbf{R}^2$. Требуется построить набор из n компактов $P_i + \{\mathbf{x}_i\}$, такой, чтобы при минимальном $\varepsilon > 0$ выполнялось вложение

$$M \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, n} (P_i + \{\mathbf{x}_i\}) + O(\mathbf{0}, \varepsilon).$$

Данная задача похожа на построение оптимального покрытия плоского множества кругами, но существенно сложнее, поскольку ε -окрестности различных компактов могут быть различными.

Обозначим через $\rho(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ функцию евклидова расстояния от точки $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ до замкнутого множества $M \subset \mathbf{R}^2$. Здесь $\|\mathbf{a}\| = \|(a_1, a_2)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ – норма вектора $\mathbf{a}$.

Определение 1. Пусть задан набор из n компактов $P_i, i = 1, \dots, n$. Будем называть

$$D^{(i,j)}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2: c(\mathbf{m}, P_i) \leq c(\mathbf{m}, P_j)\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n \quad (1)$$

зоной доминирования компакта P_i над компактом P_j .

Для простоты считаем, что $D^{(i,j)}(P) = \mathbf{R}^2$.

Определение 2. Пусть задано замкнутое множество $M \subset \mathbf{R}^2$ и набор P из n компактов $P_i, i = 1, \dots, n$. Будем называть

$$D^{(i)}(M, P) = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbf{R}^2 \setminus M : c(\mathbf{m}, P_i) = \min_{j=1, \dots, n} c(\mathbf{m}, P_j) \right\}, i = 1, \dots, n \quad (2)$$

обобщенной зоной Дирихле (см.: [Брусов, Пиявский 1971]) компакта P_i на множестве M .

При заданном множестве и наборе компактов минимальный радиус окрестности может быть вычислен по формуле

$$h(M, P(X)) = \max_{i=1, \dots, n} h(D^{(i)}(M, P(X)), P_i + \{\mathbf{x}_i\}),$$

где $h(A, B) = \max_{\mathbf{a} \in A} \rho(\mathbf{a}, B)$ – хаусдорфово отклонение [Хаусдорф 2006] компакта $A \subset \mathbf{R}^2$ от компакта $B \subset \mathbf{R}^2$.

При этом сами обобщенные зоны Дирихле можно строить как пересечения

$$D^{(i)}(M, P) = \left(\bigcap_{j=1, \dots, n} D^{(i,j)}(P) \right) \cap M, i = 1, \dots, n.$$

Основу итерационных методов решения задачи составляет выделение значимых точек на каждом множестве (2), т. е. набора точек

$$Z^{(i)}(M, P) = \{ \mathbf{m} \in D^{(i)}(M, P) : \rho(\mathbf{m}, P_i) = h(D^{(i)}(M, P), P_i) \}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В качестве алгоритма нахождения вектора сдвига центров управления можно использовать

$$\mathbf{x}_i = \alpha \mathbf{c} \{ \mathbf{z} - \pi(\mathbf{z}, P_i) : \mathbf{z} \in Z^{(i)}(M, P) \}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{c}(M)$ означает чебышёвский центр (см.: [Гаркави 1964]) множества M , т. е. центр круга наименьшего радиуса, в который может быть вложен компакт M . В формуле (3) $\pi(\mathbf{z}, M)$ означает ближайшую в евклидовой метрике точку к $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$ на выпуклом множестве M . Доказательство единственности проекции приведено, например, в [Лейтвейс 1985]. Коэффициент α выбирается в пределах $\alpha \in (0, 1]$. Процедуры, основанные на формуле (3), применяются, например, в работе [Лебедев, Успенский, Ушаков 2020].

Случай круговых пунктов управления

Ограничимся случаем, когда набор компактов P состоит из кругов в общем случае различного радиуса. Тогда его можно записать в виде

$$P_i = O(\mathbf{p}_i, r_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 1. Пусть для двух компактов P_i, P_j с центрами в точках $\mathbf{p}_i = (x_i; y_i)$ и $\mathbf{p}_j = (x_j; y_j)$ выполняется оценка

$$\| \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j \| \geq r_i + r_j. \quad (4)$$

Тогда зоны доминирования $D^{(i,j)}(P)$ и $D^{(j,i)}(P)$ разделены кривой

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} = r_i - r_j. \quad (5)$$

Доказательство. Условие (4) означает, что круги P_i, P_j либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую точку. Поэтому области доминирования пересекаются по кривой и не содержат областей кругов ненулевой площади. При этом условием того, что некоторая точка $\mathbf{z} = (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus (P_i \cup P_j)$ равноудалена от кругов, является

$$\| \mathbf{z} - \mathbf{p}_i \| - r_i = \| \mathbf{z} - \mathbf{p}_j \| - r_j.$$

Если расписать данное равенство через координаты, то получится (5).

Теорема 1 существенно упрощает нахождение множества (1).

Предложение 1. Минимум хаусдорфова отклонения обобщенной зоны Дирихле $D^{(i)}(M, P)$ от круга $P_i + \{ \mathbf{x}_i \}$ достигается при

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{c}(D^{(i)}(M, P(X))) - \mathbf{p}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Доказательство. Заметим, что если множество $D^{(i)}(M, P)$ вложено в круг $O(\mathbf{p}_i + \mathbf{x}_i, r_i)$, то хаусдорфово отклонение равно нулю, а меньше нуля оно по определению быть не может. Если $h(D^{(i)}(M, P), P_i + \{ \mathbf{x}_i \}) = g > 0$, то это значит, что хаусдорфово отклонение от одноточечного множества, состоящего из его чебышёвского центра, равно

$$h(D^{(i)}(M, P(X)), \{ \mathbf{c}(D^{(i)}(M, P(X))) \}) = r_i + g.$$

Из свойств единственности чебышёвского центра следует, что для любой точки $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$

$$h(D^{(i)}(M, P(X)), \{\mathbf{z}\}) \geq h(D^{(i)}(M, P(X)), \{\mathbf{c}(D^{(i)}(M, P(X)))\}).$$

Поэтому для любого круга $O(\mathbf{z}, r_i)$

$$h(D^{(i)}(M, P(X)), O(\mathbf{z}, r_i)) \geq h(D^{(i)}(M, P(X)), \{\mathbf{z}\}) - h(O(\mathbf{z}, r_i), \{\mathbf{z}\}) \geq r_i + g - r_i = g.$$

Это значит, что хаусдорфово отклонение компакта $D^{(i)}(M, P)$ от любого круга радиуса r_i не меньше, чем g .

Заметим, что условия предложения 1 позволяют разработать эффективную процедуру сдвига центров кругов сети с целью минимизации хаусдорфова отклонения M от их объединения.

Для решения задач оптимизации сетей логистики на плоскости модернизирован разработанный в среде MATLAB программный комплекс (см.: [Лебедев 2021]). Он реализует алгоритмы минимизации хаусдорфова отклонения, которые описаны, например, в [Лебедев, Успенский 2023], при этом ключевыми процедурами служат алгоритмы отыскания зон доминирования с помощью формулы (5), обобщенных зон Дирихле и вычисление новых точек по формуле (6). Часть конструкций при аппроксимации выпуклых множеств многоугольниками заимствована из монографии [Бронштейн 2007]. Для построения начального приближения центров кругов сети используются гексагональные или квадратные решетки, как, например, в [Лебедев, Кувшинов, 2023].

Примеры решения задачи

Пример 1. В качестве области, на которой надо установить сеть логистических центров, выберем квадрат

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \max\{x^2, y^2\} \leq 1\}. \quad (7)$$

Требуется найти оптимальную расстановку из объектов при их количестве $n = 12$. При этом три из них являются кругами $O(0, 0, 3)$, а остальные девять – кругами $O(0, 0, 1)$.

Решение найдено при помощи программного комплекса и соответствует массиву центров кругов

$$\begin{aligned} &(-0,7648; -0,0215); (-0,5034; -0,7602); (-0,044; 0,7387); (0,4380; 0,2714); \\ &(0,8738; 0,2447); (0,6737; -0,8695); (-0,0905; -0,0562); (0,4247; -0,2220); \\ &(0,1703; -0,6965); (-0,7648; 0,7387); (0,7209; 0,7864); (0,8738; -0,4112). \end{aligned}$$

Радиус ε -окрестности набора кругов, в который вложено множество M , $\varepsilon = 0,2515$. Множество (7), набор объектов и их окрестности показаны на рисунке 1.

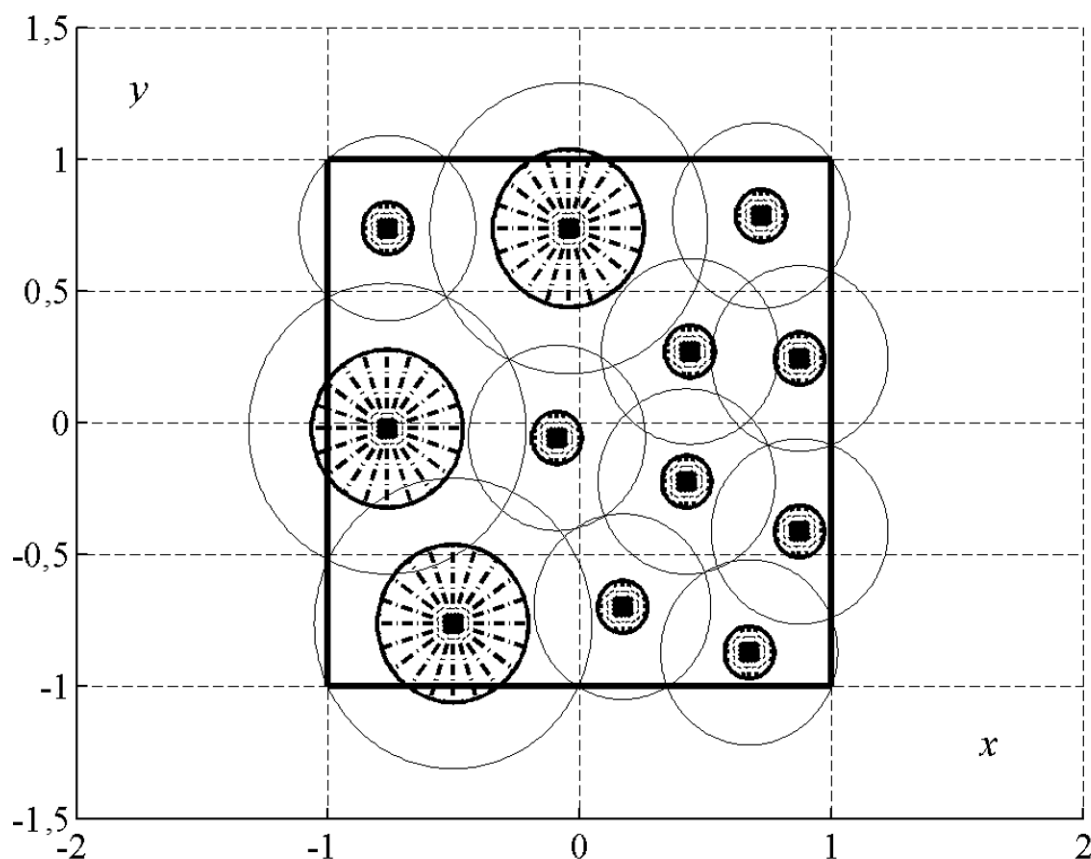


Рис. 1. Граница множества (7) (показана жирной линией), компакты P_i , $i = 1, \dots, 12$ (показаны кругами с радиальными линиями) и границы их ε -окрестностей¹
 Fig. 1. The Boundary of the Set (7), (shown with a bold line), the Compacts P_i , $i = 1, \dots, 12$, (shown with circles and radial lines), and the Boundaries of their ε -neighborhoods

Пример 2. В качестве области, на которой надо установить систему управления, выберем прямоугольный треугольник

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - |x|\}. \quad (8)$$

Требуется найти оптимальную расстановку из объектов при их количестве $n = 10$. При этом два из них являются кругами $O(0, 0,2)$, а остальные девять – кругами $O(0, 0,05)$.

Решение найдено при помощи программного комплекса и соответствует массиву центров кругов

$$\begin{aligned} &(-0,4251; 0,2545), (0,3215; 0,2763), (0,0101; 0,8129), (-0,229; 0,6435), \\ &(0,8254; 0,0679), (0,2072; 0,6158), (-0,8231; 0,0612), \\ &(0,5829; 0,1746), (-0,038; 0,0867), (-0,034; 0,4465). \end{aligned}$$

Радиус ε -окрестности набора кругов, в который вложено множество M , $\varepsilon = 0,1374$. Множество (8), набор объектов и их окрестности показаны на рисунке 2.

¹ Выполнено авторами с использованием программного комплекса [Лебедев 2021].

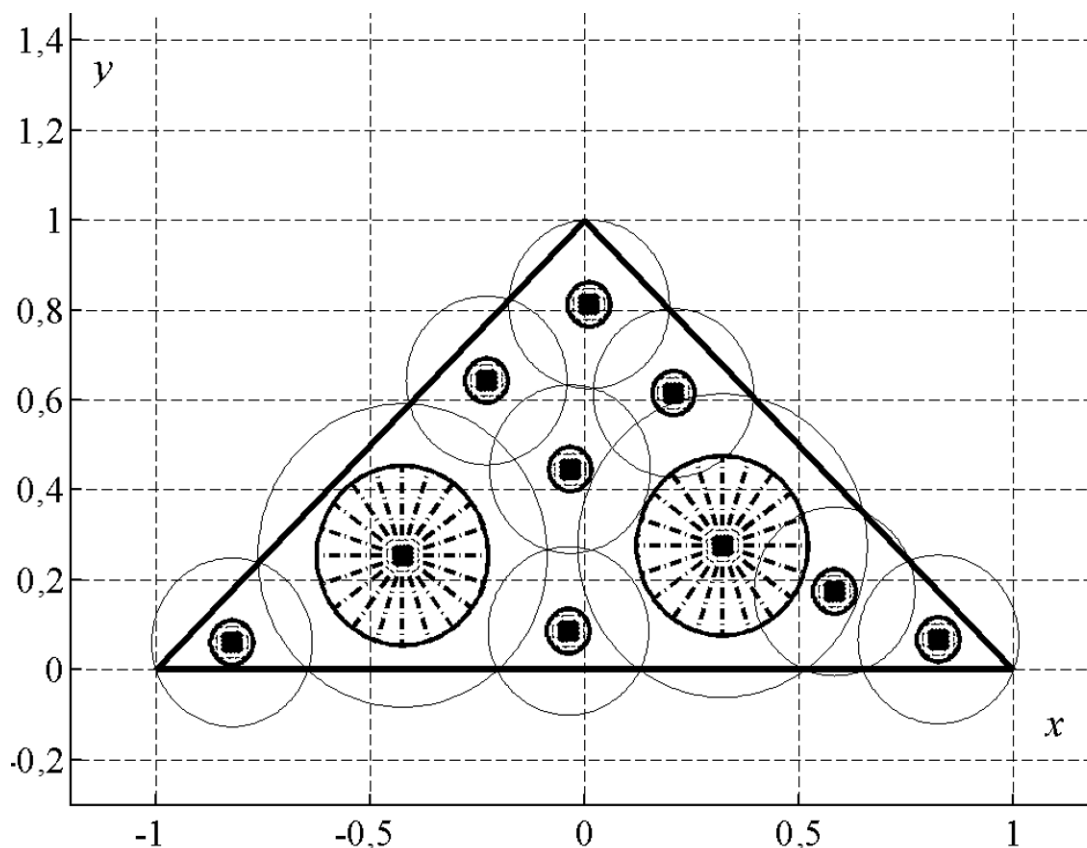


Рис. 2. Граница множества (8) (показана жирной линией), компакты P_i , $i = 1, \dots, 9$ (показаны кругами с радиальными линиями) и границы их ε -окрестностей²
 Fig. 2. The Boundary of the Set (8), (shown with a bold line), the Compacts P_i , $i = 1, \dots, 9$, (shown as circles with radial lines,) and the Boundaries of their ε -neighborhoods

В примере 1 множества P_i существенно больше по отношению к размерам компакта, чем в примере 2, поэтому часть кругов выходят за пределы M_1 . Площадь компакта M_1 в четыре раза больше площади компакта M_2 . Суммарная площадь множеств P_i в примере 1 равна $0,36\pi$, а в примере 2 – $0,1025\pi$.

Заключение

Разработаны алгоритмы решения задач о построении оптимальной сети объектов логистического назначения. Выделены обобщенные зоны влияния объектов, найдены уравнения для их границ. Предложены формулы для коррекции их координат. Проведено моделирование решения для случая, когда область, на которой строится логистическая сеть, является выпуклым многоугольником. Результаты могут использоваться при решении задач оптимизации в экономике (см., напр.: [Козырев 2003; Соколова 2003]).

Список источников

- Астраков С. Н., Квашнин А. Г., Короленко Л. А. Построение эффективных сенсорных сетей с учетом стоимостных затрат // Математические структуры и моделирование. 2017. № 3 (43). С. 50–62. DOI 10.24147/2222-8772.2017.3.50-62. EDN ZIAIP.
- Бронштейн Е. М. Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 22. С. 5–37.
- Брусов В. С., Пиявский С. А. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11, № 2. С. 304–312. EDN VOKFJP.
- Гаркави А. Л. О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи математических наук. 1964. Т. 19, вып. 6. С. 139–145.

² Выполнено авторами с использованием программного комплекса [Лебедев 2021].

- Козырев А. А. Информационные технологии в экономике и управлении : учебник. СПб. : Изд-во Михайлова В. А., 2003. 496 с.
- Лебедев П. Д. Программа минимизации хаусдорфова расстояния между подвижными многоугольниками и многогранниками : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021667689 от 01.11.2021 : заявл. : № 2021666598 от 22.10.2021 / правообладатель: ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН) (RU). Бюл. № 11. 1 с.
- Лебедев П. Д., Кувшинов О. А. Алгоритмы построения субоптимальных покрытий плоских фигур кругами в классах регулярных решеток // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 76–93.
- Лебедев П. Д., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Алгоритмы минимизации хаусдорфова отклонения выпуклого компакта от набора подвижных выпуклых многоугольников // Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, № 2. С. 218–232. DOI 10.24411/2500-0101-2020-15209. EDN HZXGKR.
- Лебедев П. Д., Успенский А. А. Алгоритмы построения оптимальных сетей для задач транспортной логистики в случае неоднородной среды // Вестник Гуманитарного университета. 2023. № 3 (42). С. 17–22. DOI 10.35853/vestnik.gu.2023.3(42).02. EDN AMYBPI.
- Лейхтвейс К. Выпуклые множества / пер. с нем. В. А. Залгаллера, Т. В. Хачатуровой ; под ред. В. А. Залгаллера. М. : Наука, 1985. 335 с.
- Соколова Г. Н. Информационные технологии экономического анализа: теория и практика. М. : Экзамен, 2002. 318 с.
- Ушаков В. Н., Лахтин А. С., Лебедев П. Д. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 291–308. EDN TUIHKP.
- Хаусдорф Ф. Теория множеств / пер. с нем. Н. Б. Веденисова ; под ред. и с доп. П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова. Изд. 3-е, стер. М. : URSS : КомКнига, 2006. 304 с.

Информация об авторах

Павел Дмитриевич Лебедев, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия).

Александр Александрович Успенский, д-р физ.-мат. наук, заведующий сектором ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор АНО ВО «Гуманитарный университет» (Екатеринбург, Россия).

Information about the authors

Pavel D. Lebedev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg, Russia).

Alexander A. Uspenskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Head of sector, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; prof., Liberal Arts University – University for Humanities (Yekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию | Submitted 28.04.2026.

Одобрена после рецензирования | Revised 28.05.2026.

Принята к публикации | Accepted 28.05.2026.