

УДК 338.24

doi:10.35853/vestnik.gu.2026.14-3.04
5.2.3.

Двухступенчатый регулятор в задаче оптимизации роста ресурсозависимой экономики

Анастасия Александровна Усова¹, Александр Михайлович Тарасьев²

^{1,2}Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

¹ausova@imm.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5757-066X>

²tam@imm.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8366-9628>

Аннотация. Модель роста для регионов с ресурсозависимой экономикой предусматривает контроль запасов исчерпаемых природных материалов. Данный контроль носит тройную нагрузку. Во-первых, он обеспечивает наличие запаса ресурсов во избежание их полного исчерпания в прогнозируемом периоде времени. Вторая роль управляющего параметра состоит в определении объема инвестиций, выделяемых на развитие научно-технологического сектора с целью разработки технологий, позволяющих использовать в производстве восполняемые и/или заменяемые ресурсы. Третья роль регулятора – обеспечить максимум функционала качества задачи управления, который описывает кумулятивный уровень относительного роста сбережений, дисконтированного на бесконечном промежутке времени. В настоящей работе подробно рассматриваются первые две задачи регулятора, формулируются условия, при которых гарантировано отсутствие рисков исчерпания ресурсов при долгосрочных прогнозах. Третья роль также приобретает свою значимость в случае возникновения неединственности в процессе синтеза регулятора на основе решения первых двух из указанных задач.

Ключевые слова: модель роста, ресурсозависимость, задача управления, синтез управления

Благодарности: исследование автора Усовой А. А. выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00269, <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>

Для цитирования: Усова А. А., Тарасьев А. М. Двухступенчатый регулятор в задаче оптимизации роста ресурсозависимой экономики // Вестник Гуманитарного университета. 2026. Т. 14, № 3. С. 27–45. DOI 10.35853/vestnik.gu.2026.14-3.04.

The Two-Step Regulator in the Context of Optimizing the Growth of a Resource-Dependent Economy

Anastasiia A. Usova¹, Alexander M. Tarasyev²

^{1,2}N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia

¹ausova@imm.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5757-066X>

²tam@imm.uran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8366-9628>

Abstract. The growth model for resource dependent economies requires for the control of stocks of exhaustible natural materials. This control carries a triple burden. Firstly, it ensures the availability of a reserve of resources to avoid their complete exhaustion in the expected period of time. The second role of the control parameter is to determine the amount of investments allocated for the development of the scientific and technological sector in order to create technologies

that enable the use of renewable and/or recyclable resources in production. The third role of the regulator is to provide the maximum possible value of the quality functionality of the control problem, which describes the cumulative level of relative savings discounted over an infinite period of time. In this paper, the first two tasks of the regulator are considered in detail, and conditions are formulated under which the absence of risks of total resource exhaustion in long-term forecasts is guaranteed. The third role also becomes important in the case of non-uniqueness in the process of synthesizing a regulator based on solving the first two of these problems.

Keywords: growth model, resource-dependent economy, control problem, control synthesis

Acknowledgements: The research of A. A. Usova was supported by a grant from the Russian Science Foundation (grant № 25-11-00269), <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>

For citation: Usova AA, Tarasyev AM. The Two-Step Regulator in the Context of Optimizing the Growth of a Resource-Dependent Economy. *Vestnik Gumanitarnogo universiteta = Bulletin of Liberal Arts University*. 2026;14(3):27-45. (In Russ.). DOI:10.35853/vestnik.gu.2026.14-3.04.

Введение

Работа посвящена построению долгосрочных стратегий развития ресурсозависимой экономики, модель которой была предложена А. В. Кряжимским и А. М. Тарасевым [Tarasyev, Zhu 2012; Tarasyev, Zhu 2013]. В качестве основного драйвера развития ресурсоемких производств модель предлагает оптимизировать потребление материалов $m(t)$ за счет регулятора, который снижает ресурсозависимость выпуска $y(t)$. В модели выпуск задается степенной функцией типа Кобба – Дугласа

$$y(t) = ae^{bt}m^{\alpha}(t),$$

где ae^{bt} – общий фактор производительности, а параметр α – коэффициент эластичности производственной функции, принимающий значения в интервале от 0 до 1. Одним из возможных путей для достижения этой цели является инвестирование в объеме $u(t)y(t)$ в научно-технологический сектор для разработки менее ресурсозатратных технологий и/или технологий производства, использующих восполняемые или заменяемые материалы.

Качественно влияние инвестиций на потребление ресурсов определяется продуктивностью ресурсов $z(t) = y(t)/m(t)$, которая указывает на размер выпуска, произведенный из единицы объема затраченных ресурсов. При этом относительный уровень изменения продуктивности пропорционален инвестициям в снижение ресурсоемкости производств

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = \beta u(t).$$

Параметр β является коэффициентом пропорциональности между инвестициями и относительным ростом продуктивности ресурсов, характеризующим эффективность инвестиций.

Вторая задача данного регулятора $u(t)$ состоит в обеспечении сохранности необходимого уровня исчерпаемых ресурсов для бесперебойной работы производств в долгосрочной перспективе. Динамика потребления ресурсов при степенной производственной функции $y(t)$ и заданной динамике продуктивности ресурсов $\dot{z}(t)$ определяется формулой

$$\dot{m}(t) = \frac{b - \beta u(t)}{1 - \alpha} m(t).$$

При условии ограниченности ресурсов, которое можно записать в виде $M(t) \leq M_0$, где M_0 – изначальный запас ресурсов, а $M(t)$ – общий объем потребленных ресурсов к

моменту времени t , текущее потребление материалов $m(t)$ должно удовлетворять интегральному неравенству

$$M(t) = \int_0^t m(s)ds \leq M_0.$$

В итоге получается динамическая управляемая система в переменных $M(t)$ и $m(t)$, удовлетворяющих следующим дифференциальным уравнениям и начальным условиям

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = m(t), & M(0) = 0 \\ \dot{m}(t) = \frac{b - \beta u(t)}{1 - \alpha} m(t), & m(0) = m_0. \end{cases}$$

Третья сторона регулятора $u(t)$ раскрывается в требованиях к максимизации интегрального показателя качества задачи управления. Итак, в силу того, что общий выпуск $y(t)$ может быть распределен между инвестициями $u(t)y(t)$, расходами на закупку материалов $p(t)m(t)$ по ценам $p(t)$ в объеме $m(t)$ и сбережениями $s(t)$, строится *балансовое соотношение* $y(t) = u(t)y(t) + p(t)m(t) + s(t)$, откуда уровень сбережений в текущий момент времени выражается равенством $s(t) = y(t)(1 - u(t) - c(t))$, где $c(t) = p(t)m(t)/y(t)$ задает долю выпуска $y(t)$, расходуемую на закупку материалов. Уровень цен на природные ресурсы обратно пропорционален их остаткам на текущий момент времени, что можно записать в виде равенства $p(t) = p_0 M_0 / (M_0 - M(t))$.

Наличие ненулевого объема сбережений $s(t)$ накладывает ограничение на долю $u(t)$ выпуска $y(t)$, инвестируемую в повышение эффективности использования ресурсов, т. е. $0 \leq u(t) \leq 1 - c(t) \leq \bar{u} < 1$.

Интегральный показатель качества процесса управления имеет вид

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \ln s(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\ln y(t) + \ln (1 - u(t) - c(t))) dt,$$

где положительный параметр ρ определяет дисконтирующий множитель.

Задача управления состоит в поиске такой инвестиционной стратегии $u(t)$, удовлетворяющей ограничениям $0 \leq u(t) \leq \bar{u} < 1$, которая максимизирует функционал качества J на траекториях динамической системы $(M(t), m(t))$, отвечающих начальным условиям $(0, m_0)$ и фазовым ограничениям $M(t) \leq M_0$.

Поставленная задача изучалась в работах [Usova, Tarasyev 2015; Tarasyev, Usova, Wang 2015]. Ее решение [Кряжимский, Тарасьев, Усова, Ванг 2015] базируется на принципе максимума Понтрягина и качественном анализе гамильтоновой системы [Tarasyev, Usova 2016]. Численный алгоритм построения оптимального решения основывается на факте существования нелинейного регулятора [Усова, Тарасьев 2025], стабилизирующего гамильтонову систему в окрестности положения равновесия вплоть до асимптотической устойчивости по первому приближению.

Вместе с тем данная модель представляет интерес и с точки зрения теории надежности, которая позволяет выписать допустимые решения **задачи управления**, удовлетворяющие всем условиям задачи, т. е. найденные инвестиционные стратегии $u(t)$ будут отвечать ограничениям $0 \leq u(t) \leq \bar{u} < 1$ и выполнять роль регулятора, который гарантирует наличие необходимого объема исчерпаемых ресурсов для бесперебойной работы производств в долгосрочной перспективе.

В следующем разделе будет приведена вероятностная интерпретация модели и выписаны ограничения на управление $u(t)$, при которых его основная функция как регулятора будет выполнена. Далее приводится иллюстративный пример построения допустимого решения задачи управления при кусочно-постоянной структуре регулятора.

Связь показателей модели и вероятностных характеристик

В работе [Усова, Тарасьев 2025] рассматривается иная интерпретация модельных переменных. В условиях ограниченности ресурсов вводится случайная величина τ , которая определяет момент истощения ресурсов и является абсолютно непрерывной. Действительно, функция распределения данной случайной величины задается отношением суммарного количества уже использованных природных ресурсов к их изначальному объему, что в модельных переменных принимает вид $F_\tau(t) = M(t)/M_0$, а ее плотность выражается равенством $f_\tau(t) = m(t)/M_0$. В силу динамики модели $(M(t), m(t))$ плотность случайной величины τ является кусочно-гладкой функцией, так как

$$\dot{f}_\tau(t) = \frac{b - \beta u(t)}{1 - \alpha} f_\tau(t), \quad f_\tau(0) = \frac{m(0)}{M_0} = \frac{m_0}{M_0}.$$

Здесь же отметим еще одно условие для инвестиционной стратегии. Полученное равенство для динамики плотности распределения можно проинтегрировать, что приводит к выражению

$$f_\tau(t) = \frac{m_0}{M_0} e^{\frac{bt - \beta U(t)}{1 - \alpha}}, \quad U(t) = \int_0^t u(s) ds.$$

Из свойства плотности распределения очевидна справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Кумулятивный объем инвестиций $U(t)$ на полуоси должен удовлетворять интегральному равенству

$$1 = \int_0^{+\infty} f_\tau(t) dt \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{\frac{bt - \beta U(t)}{1 - \alpha}} dt = \frac{M_0}{m_0}.$$

Согласно теории надежности [Гнеденко, Беляев, Соловьев 1965], риски истощения ресурсов характеризуются показателем $h_\tau(t) = f_\tau(t)/(1 - F_\tau(t))$. Для рассматриваемой задачи этот показатель имеет динамику

$$\dot{h}_\tau(t) = h_\tau(t) \left(h_\tau(t) + \frac{b - \beta u(t)}{1 - \alpha} \right), \quad h_\tau(0) = \frac{m_0}{M_0}.$$

В условиях постоянного уровня инвестиций $u(t) = u_0$, $(0 \leq t \leq T)$ риски меняются согласно логистическому закону. Отметим, что логистическое распределение в моделях роста используется для описания развития экономических показателей в условиях ограниченности ресурсов [Караев, Коновалов 2011; Коновалов, Караев, Мельничук 2012]. Проинтегрируем последнее уравнение на отрезке $[0, T]$ при заданном начальном условии и получим соотношение для опасности истощения ресурсов

$$h_\tau(t) = \frac{v}{1 - \gamma e^{\gamma t}}, \quad v = \frac{\beta u_0 - b}{1 - \alpha}, \quad \gamma = 1 - \frac{v}{m_0 / M_0}, \quad t \in [0, T].$$

В полученном равенстве неизвестными остаются параметры u_0 и T . Их определение зависит от ряда предположений, о которых ведется речь в следующем разделе.

Сценарий развития экономической системы при двухступенчатой структуре регулятора

Рассмотрим ступенчатый сценарий развития регулятора $u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & 0 \leq t \leq T \\ \dot{u}, & t \geq T \end{cases}.$$

Для определения параметров этой функции обратимся к результатам качественного анализа задачи оптимального управления [Usova, Tarasyev 2015], согласно которым переменная управления имеет установившееся состояние на уровне $u^* = b/(\alpha\beta)$, поэтому в качестве параметра $\hat{u}$ выберем стационарное значение регулятора u^* .

Далее, для нахождения начального уровня инвестиций u_0 и момента переключения T используем интегральное ограничение для кумулятивного объема инвестиций $U(t)$, а именно

$$\int_0^{+\infty} e^{\frac{bt-\beta U(t)}{1-\alpha}} dt = \frac{M_0}{m_0} \Rightarrow \frac{1-\alpha}{b-\beta u_0} \left(e^{\frac{b-\beta u_0}{1-\alpha} T} - 1 \right) + \frac{\alpha}{b} e^{\frac{b-\beta u_0}{1-\alpha} T} = \frac{M_0}{m_0}.$$

В полученном равенстве удобно вести линейную замену переменной управления u_0 величиной $v = (\beta u_0 - b)/(1 - \alpha)$. В результате относительно переменных T и v получим следующее алгебраическое уравнение, которое эквивалентно исходному выражению с учетом особенности в точке $v = 0$

$$\frac{b}{\alpha} \left(\frac{m_0}{M_0} - v \right) e^{vT} = \frac{m_0}{M_0} \left(\frac{b}{\alpha} - v \right), \quad \text{если } v \neq 0$$

$$T = \frac{M_0}{m_0} - \frac{\alpha}{b}, \quad \text{если } v = 0.$$

Исключая особую точку $v = 0$, для нахождения обоих неизвестных параметров, необходимо выписать еще одно уравнение. В работе [Usova, Tarasyev 2015] доказано, что объем выпуска имеет уровень насыщения y^* . Поэтому выразим выпуск $y(t)$ через найденные ранее величины

$$y(t) = ae^{bt} m^\alpha(t) = ae^{bt} M_0^\alpha f_\tau^\alpha(t) = am_0^\alpha \cdot \begin{cases} e^{\frac{b-\alpha\beta u_0}{1-\alpha} t}, & 0 \leq t \leq T \\ e^{\frac{b-\alpha\beta u_0}{1-\alpha} T}, & t \geq T \end{cases}.$$

В пределе по t , стремящемся к бесконечности, объем производства стремится к стационарному уровню, откуда вытекает равенство

$$y^* = am_0^\alpha e^{\frac{b-\alpha\beta u_0}{1-\alpha} T} = am_0^\alpha e^{\alpha \left(\frac{b}{\alpha} - v \right) T} \Rightarrow \left(\frac{b}{\alpha} - v \right) T = \ln \left(\left(\frac{y^*}{a} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{m_0} \right).$$

Таким образом, получена система двух уравнений для нахождения параметров v и T :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ll} B(m_0 / M_0 - v)e^{vT} = b / \alpha - v, & \text{если } v \neq 0, \\ T = M_0 / m_0 - \alpha / b, & \text{если } v = 0, \end{array} \right. \quad B = \frac{b / \alpha}{m_0 / M_0} \gg 1 \\ (b / \alpha - v)T = A, \quad A = \ln \left(\left(\frac{y^*}{a} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{m_0} \right). \end{array} \right.$$

Замечание 1. Отметим, что вырожденная точка $v = 0$ является решением системы, если и только если параметры модели отвечают равенству

$$\frac{\alpha}{b} \ln \left(\left(\frac{y^*}{a} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{m_0} \right) \equiv \frac{M_0}{m_0} - \frac{\alpha}{b}.$$

Однако для используемых модельных данных [Tarasyev, Zhu 2012; Tarasyev, Zhu 2013; Usova, Tarasyev 2015; Tarasyev, Usova, Wang 2015; Кряжимский, Тарасьев, Усова, Ванг 2015] это соотношение не выполняется, поскольку левая часть равенства принимает значение 255,55076, а правая – 18402553,1915, поэтому вырожденная точка исключается.

Замечание 2. В ситуации, когда $A \leq 0$, т. е. предельный уровень выпуска y^* ниже начального $y(0)$, система не имеет решений. Действительно, при $A \leq 0$ из второго уравнения системы получаем ограничение снизу для переменной v , а именно $v \geq b/\alpha >> m_0/M_0$. Соответственно, первое уравнение переписывается в виде

$$\begin{aligned} B \left(v - \frac{m_0}{M_0} \right) e^{vT} - \left(v - \frac{b}{\alpha} \right) &= 0, \\ B \left(v - \frac{b}{\alpha} + \frac{m_0}{M_0} (B - 1) \right) e^{vT} - \left(v - \frac{b}{\alpha} \right) &= 0 \\ \left(v - \frac{b}{\alpha} \right) (B - e^{-vT}) &= -B(B - 1) \frac{m_0}{M_0} \end{aligned}$$

С учетом того, что $v \geq b/\alpha$ и $T > 0$, имеем $e^{-vT} \leq 1$. В силу того, что $B > 1$, левая часть равенства всегда строго положительна, однако правая – строго отрицательна. Поэтому при $A \leq 0$ система не имеет решений. В силу этого в дальнейшем полагаем, что $A > 0$.

Важно отметить, что если решение данного уравнения существует, то найденное значение переменной v должно удовлетворять условию: $-b/(1 - \alpha) \leq v \leq (\beta \bar{u} - b)/(1 - \alpha)$, которое следует из ограничений на исходную переменную управления $0 \leq u(t) \leq \bar{u} < 1$. Исходя из последнего равенства в системе уравнений, требования к моменту переключения T записываются в виде

$$T \in \mathcal{J} := [T_{\min}, T_{\max}], \text{ где } T_{\min} = \frac{A(1 - \alpha)}{b / \alpha}, \quad T_{\max} = \frac{A}{b / \alpha - m_0 / M_0}.$$

При этом условия существования решения определяются областями определения функций, входящих в уравнения системы. Аккумулируя все ограничения, наложенные на искомые величины и параметры модели ($m_0/M_0 << b/\alpha < \beta \bar{u}$, $y^* > y(0)$), приходим к следующему множеству допустимых значений $\mathcal{M}$ переменной v :

$$\mathcal{M} = \left[-\frac{b}{1 - \alpha}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{m_0}{M_0} \right).$$

Лемма 1. Система уравнений для нахождения начального управления v (или u_0) и момента времени T переключения управления на стационарное $v^* = b/\alpha$ ($u^* = b/(\alpha\beta)$)

$$\begin{cases} B \left(\frac{m_0}{M_0} - v \right) e^{vT} = \frac{b}{\alpha} - v, & B = \frac{b / \alpha}{m_0 / M_0} > 1 \\ \left(\frac{b}{\alpha} - v \right) T = A, & A = \ln \left(\left(\frac{y^*}{a} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{m_0} \right) > 0, \end{cases}$$

в области $(T, v) \in \mathcal{J} \times \mathcal{M}$ приводится к эквивалентному нелинейному алгебраическому уравнению следующего вида:

$$G(T) = B \left(\frac{b}{\alpha} - \frac{m_0}{M_0} \right) T - A \left(B - e^{A - \frac{b}{\alpha} T} \right) = 0.$$

Доказательство. Для получения нелинейного уравнения заметим, что момент времени $T \in \mathcal{J}$ не может быть нулевым, так как $T \geq T_{\min} = A(1 - \alpha)/(b/\alpha) > 0$. Далее, из второго равенства выражаем $\nu T = (b/\alpha)T - A$. Наконец, умножением первого уравнения справа и слева на T и последующей заменой величины νT выражением $(b/\alpha)T - A$ получается нелинейное алгебраическое уравнение, указанное в формулировке леммы.

Лемма 2. Функция $G(T)$ принимает строго положительное значение в точке $T = T_{\max} = A/(b/\alpha - m_0/M_0)$.

Доказательство проводится прямой подстановкой значения $T = T_{\max} = A/(b/\alpha - m_0/M_0)$ в функцию $G(T)$, которая приводит к выражению

$$G(T_{\max}) = AB - A(B - e^{A - (b/\alpha)T_{\max}}) = A e^{A - (b/\alpha)T_{\max}} > 0.$$

Лемма 3. Функция $G(T)$ имеет глобальный минимум в точке

$$T_* = \alpha/b (\ln(A/(B - 1)) + A),$$

которая строго меньше $T_{\max}$, и принимает в нем неположительное значение, т. е. $G(T_*) \leq 0$.

Доказательство. Для нахождения точки экстремума продифференцируем функцию $G(T)$ и приравняем производную к нулю:

$$G'(T) = B(b/\alpha - m_0/M_0) - A(b/\alpha) e^{A - (b/\alpha)T} = 0 \Rightarrow (B - 1) - A e^{A - (b/\alpha)T} = 0.$$

Из последнего равенства легко находим $T = \alpha/b (\ln(A/(B - 1)) + A) = T_*$, которая корректно определена в силу ограничений на параметры модели $A > 0, B > 1$.

Знак второй производной функции $G(T)$ положительный для всех T , поскольку

$$G''(T) = A(b/\alpha)^2 e^{A - (b/\alpha)T} > 0.$$

Следовательно, функция $G(T)$ всюду вогнута, что доказывает глобальность найденной точки минимума.

Покажем, что $G(T_*) \leq 0$ путем прямой подстановки найденного значения T_* в функцию $G(T)$:

$$\begin{aligned} G(T_*) &= \frac{b}{\alpha} (B - 1)T_* + (B - 1) - AB \leq 0 \Leftrightarrow \frac{b}{\alpha} T_* \leq \frac{AB}{B - 1} - 1 = A - 1 + \frac{A}{B - 1} \\ \frac{b}{\alpha} T_* &= \ln \frac{A}{B - 1} + A \Rightarrow G(T_*) \leq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{A}{B - 1} \leq \frac{A}{B - 1} - 1. \end{aligned}$$

Обозначив строго положительную дробь $A/(B - 1)$ символом z , получим неравенство $\ln(z) \leq z - 1$, которое всегда выполняется при положительных значениях переменной z , поскольку функция $h(z) = z - 1 - \ln(z)$ имеет глобальный минимум при $z = 1$ и принимает в точке минимума значение, равное нулю, следовательно, для всех $z > 0$ функция $h(z)$ неотрицательна. О глобальности минимума говорит то, что для всех положительных значений переменной z функция $h(z)$ строго вогнута, действительно, $h''(z) = 1/z^2 > 0$.

Для всех $T > T_*$ функция $G(T)$ строго возрастает. При этом согласно **Лемме 2** $G(T_{\max}) > 0$, а $G(T_*) \leq 0$. Значит, по определению возрастающей функции, так как $G(T_*) \leq 0 < G(T_{\max})$, получим $T_* < T_{\max}$. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 4. Пусть параметры модели удовлетворяют условиям $A > 0$ и $B > 1$, тогда справедливы утверждения:

1. Если точка минимума T_* строго меньше $T_{\min}$, то $G(T_{\min}) < 0$.
2. Если $G(T_{\min}) \geq 0$, то точка минимума T_* превосходит минимально возможное значение $T_{\min}$ параметра T , т. е. $T_* > T_{\min}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Пусть $T_* < T_{\min}$, тогда справедливы оценки

$$0 < \frac{b}{\alpha}(T_{\min} - T_*) = (1 - \alpha)A - \ln \frac{A}{B-1} - A = -\alpha A - \ln \frac{A}{B-1}$$

$$\frac{A}{B-1} < e^{-\alpha A} \Rightarrow \alpha A e^{\alpha A} < \alpha(B-1).$$

Теперь построим оценку для $G(T_{\min})$:

$$G(T_{\min}) = A(e^{\alpha A} - \alpha(B-1) - 1) < A(e^{\alpha A} - \alpha A e^{\alpha A} - 1) = -A(\alpha A e^{\alpha A} - e^{\alpha A} + 1).$$

Введем вспомогательную функцию $g(q) = qe^q - e^q + 1$ и докажем, что она строго положительная при $q > 0$. Производная функции $g(q)$ равна $g'(q) = qe^q + e^q - e^q = qe^q$ и обращается в ноль в точке $q = 0$, которая является точкой минимума, так как $g''(q) = (1 + q)e^q > 0$ при $q > -1$. При этом $g(0) = 0$, следовательно, $g(q) > 0$ при положительных значениях аргумента q . Возвращаясь к оценке $G(T_{\min})$, выражение в скобках есть значение функции $g(q)$ при $q = \alpha A > 0$. Следовательно, в силу доказанного свойства функции $g(q)$, значение $g(\alpha A)$ строго больше нуля. Таким образом, обоснована первая импликация.

Второе утверждение доказывается аналогично. Пусть $G(T_{\min}) \geq 0$, покажем, что $T_* > T_{\min}$.

Так как $G(T_{\min}) = A(e^{\alpha A} - \alpha(B-1) - 1) \geq 0$, следовательно, $\alpha(B-1) \leq e^{\alpha A} - 1$. Оценим величину

$$e^{(b/\alpha)(T_* - T_{\min})} = e^{\alpha A + \ln(A/(B-1))} = A e^{\alpha A} / (B-1) = \alpha A e^{\alpha A} / (\alpha(B-1)) \geq \alpha A e^{\alpha A} / (e^{\alpha A} - 1).$$

Как было доказано, $g(\alpha A) = \alpha A e^{\alpha A} - e^{\alpha A} + 1 > 0$. Откуда легко видеть, что $\alpha A e^{\alpha A} / (e^{\alpha A} - 1) > 1$. Продолжая оценивать величину $e^{(b/\alpha)(T_* - T_{\min})}$, приходим к тому, что $e^{(b/\alpha)(T_* - T_{\min})} > 1$. Полученное неравенство доказывает вторую импликацию, так как $e^{(b/\alpha)(T_* - T_{\min})} > 1$ тогда и только тогда, когда $(b/\alpha)(T_* - T_{\min}) > 0$, следовательно, $T_* > T_{\min}$. Лемма доказана.

Утверждение 2. Нелинейное алгебраическое уравнение

$$G(T) = B \left(\frac{b}{\alpha} - \frac{m_0}{M_0} \right) T - A \left(B - e^{A - \frac{b}{\alpha} T} \right) = 0$$

имеет решение $T_0 \in \mathcal{J}$, удовлетворяющее условию $T_0 \in \mathcal{J}$, $v_0 \in \mathcal{M}$, если уровень насыщения y^* выпуска превышает начальный $y(0)$ ($A > 0$), а параметры модели отвечают условию $b/\alpha - m_0/M_0 > 0$ ($B > 1$). При этом решение будет единственно, если и только если выполнено условие $y^* < am_0^\alpha (bM_0/m_0 + 1 - \alpha)$ или $y^* = am_0^\alpha \cdot \exp(b \cdot M_0/m_0 - \alpha)$, в противном случае решений будет два (условия существования корней и схематичное изображение их местоположения представлены в таблице 1 и на рисунке 1 соответственно).

Таблица 1. Условия существования корней уравнения¹
Table 1. Conditions for the existence of the equation's roots

Корни	Оценки корней	Условие
2 корня: T_{01}, T_{02}	$0 < T_{\min} \leq T_{01} < T_* < T_{02}$	$y^* \geq am_0^\alpha (bM_0/m_0 + 1 - \alpha)$
1 корень: T_0	$T_0 = T_*$	$y^* = am_0^\alpha \cdot \exp(b \cdot M_0/m_0 - \alpha)$
1 корень: T_0	$T_0 > T_*$	$y^* < am_0^\alpha (bM_0/m_0 + 1 - \alpha)$

¹ Составлено авторами.

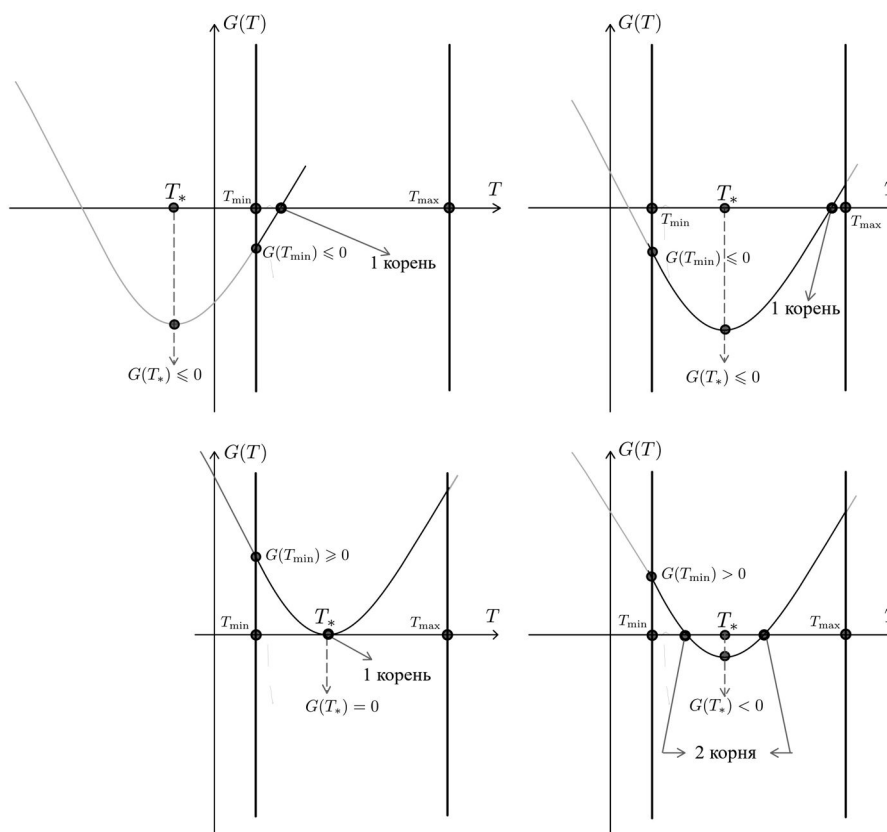


Рис. 1. Существование и расположение нулей функции $G(T) = 0^2$
 Fig. 1. The Existence and Location of the Zeros of the Function $G(T) = 0$

Доказательство. Согласно **Лемме 3** функция $G(T)$ имеет глобальный минимум в точке T_* , в которой принимает неположительное значение. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $G(T_{min}) \geq 0$, тогда (по **Лемме 4**) $T_{min} < T_*$. Поскольку функция $G(T)$ непрерывна, на отрезке $[T_{min}, T_*]$ убывает и $G(T_*) \leq 0 \leq G(T_{min})$, то найдется такое значение T_{01} переменной T , что $G(T_{01}) = 0$, при этом $T_{01} \in [T_{min}, T_*]$. Далее, при $T \in (T_*, T_{max}]$ функция $G(T)$ строго монотонно возрастает и при этом $G(T_*) \leq 0 < G(T_{max})$ (см. **Леммы 2 и 3**). Значит, в силу непрерывности функции $G(T)$ существует точка $T_{02} \in (T_*, T_{max}]$ такая, что $G(T_{02}) = 0$. Таким образом, при $G(T_{min}) \geq 0$ уравнение $G(T) = 0$ имеет два корня. В исходных параметрах модели условие $G(T_{min}) \geq 0$ переписывается в виде $y^* \geq am_0^\alpha (bM_0/m_0 + 1 - \alpha)$ (см. доказательство **Леммы 3**).

Существует особый случай, когда корни T_{01} и T_{02} совпадают. Такое возможно, если $G(T_*) = 0$, тогда $T_{01} = T_{02} = T_*$. При этом выражение $G(T_*) = 0$ приводит к равенству (см. доказательство **Леммы 3**)

$$G(T_*) = (B-1) \left(\ln \frac{A}{B-1} + A + 1 \right) - AB = (B-1) \left(\ln \frac{A}{B-1} + 1 \right) - A = 0 \Rightarrow$$

$$\ln \frac{A}{B-1} = \frac{A}{B-1} - 1 \Leftrightarrow A = B-1 \Rightarrow y^* = y(0)e^{\alpha(b-1)} = am_0^\alpha e^{bM_0/m_0 - \alpha}.$$

Полученное значение для уровня насыщения роста выпуска $y^* = am_0^\alpha \cdot \exp(b \cdot M_0/m_0 - \alpha)$ удовлетворяет ограничению $y^* \geq am_0^\alpha (bM_0/m_0 + 1 - \alpha)$. Действительно, в силу того, что для всех положительных значений аргумента q справедливо неравенство $e^q - q - 1 > 0$, то при подстановке в это неравенство величины $q = bM_0/m_0 - \alpha = \alpha(B-1) > 0$ имеем $\exp(bM_0/m_0 - \alpha) - (bM_0/m_0 - \alpha) - 1 > 0$. Умножив полученное неравенство на $am_0^\alpha > 0$, получим $am_0^\alpha \cdot \exp(b \cdot M_0/m_0 - \alpha) \geq am_0^\alpha (bM_0/m_0 - \alpha + 1)$, т. е. $y^* \geq am_0^\alpha (bM_0/m_0 + 1 - \alpha)$.

² Составлено авторами.

2. Пусть $G(T_{\min}) < 0$. Предположим дополнительно, что $T_{\min} \leq T_*$. Тогда на отрезке $[T_{\min}, T_*]$ функция $G(T)$ не возрастает, и ее значения удовлетворяют неравенству $G(T_*) \leq G(T_{\min}) < 0$, которое свидетельствует об отсутствии нулей функции $G(T)$ на отрезке $[T_{\min}, T_*]$. Далее рассмотрим диапазон $(T_*, T_{\max}]$ для переменной T . На этом полуинтервале функция $G(T)$ строго монотонно возрастает, при этом справедливы оценки $G(T_*) \leq 0 < G(T_{\max})$ (см. Леммы 2 и 3). Следовательно, в силу непрерывности функции $G(T)$ существует единственное значение T_0 ее переменной T , при котором функция обращается в ноль, т. е. $G(T_0) = 0$. Таким образом, утверждение доказано.

Следствие. Начальный уровень управления u_0 по найденным (см. Утверждение 2) значениям момента переключения T вычисляется по формуле

$$u_0 = \frac{b}{\alpha\beta} - \frac{1-\alpha}{\beta} \frac{A}{T}.$$

Доказательство. Возвращаясь к исходной системе уравнений для нахождения начального управления v и момента переключения T (см. Лемму 1), из второго уравнения можно выразить значение параметра v , а именно $v = b/\alpha - A/T$. Согласно Утверждению 2 момент времени T найден, поэтому параметр v также можно считать известным. С исходным значением переменной управления u_0 параметр v связан равенством $v = (\beta u_0 - b)/(1 - \alpha)$. Выражение из полученного равенства исходного начального значения управления u_0 завершает доказательство следствия.

Замечание. В ситуации, когда существует два решения T_{01}, T_{02} уравнения $G(T) = 0$, также находится и два значения u_{01}, u_{02} начального уровня инвестиций. В этой связи наиболее предпочтительным будет считаться то решение, которое доставляет наибольшее значение функционалу качества $J(\cdot)$ исходной задачи управления

$$J - \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\ln y(t) + \ln(1 - u(t) - c(t))) dt = \\ = \int_0^{T(v)} e^{-\rho t} (\ln y(t) + \ln(1 - u(t) - c(t))) dt + \frac{\ln s^*}{\rho} e^{-\rho T(v)}.$$

Аналитическое исследование данного выражения представляется достаточно громоздким, поэтому при наличии двух решений u_{01} и u_{02} выбор наилучшего осуществляется численно.

Таким образом, полностью определены параметры регулятора $u(t)$ ступенчатого вида и построена функция выпуска $y(t)$. Для завершения остается вычислить остальные модельные величины.

Утверждение 3. При двухступенчатой структуре регулятора основные модельные переменные вычисляются согласно следующим формулам.

Основные показатели расхода материалов:

$$m(t) = \begin{cases} m_0 e^{-v_0 t}, t \in [0, T_0] \\ m_0 e^{-v_0 T_0} e^{\frac{b}{\alpha}(t-T_0)}, t \geq T_0 \end{cases} \quad \left| \quad M(t) = \frac{m_0}{v_0} \begin{cases} 1 - e^{-v_0 t}, t \in [0, T_0], \\ 1 - \left(1 - \frac{v_0}{b/\alpha}\right) e^{-v_0 T_0} - \frac{v_0}{b/\alpha} e^{(b/\alpha - v_0)T_0 - (b/\alpha)t}, t \geq T_0, \end{cases} \right.$$

Вероятностные характеристики модели – плотность, распределение и функция риска:

$$f_{\tau}(t) = \frac{m(t)}{M_0} \quad \left| \quad F_{\tau}(t) = \frac{M(t)}{M_0} \quad \left| \quad h_{\tau}(t) = \frac{f_{\tau}(t)}{1 - F_{\tau}(t)} \right. \right.$$

Показатели изменения цены и объемов производства:

$$p(t) = \frac{p_0 M_0}{M_0 - M(t)} = \frac{p_0}{1 - F_t(t)} \quad \left| \quad y(t) = ae^{bt} m(t) = \begin{cases} am_0 e^{(b-\alpha v)t}, & t \in [0, T_0] \\ y & t \geq T \end{cases}$$

Относительная стоимость потребляемых ресурсов в объеме выпуска, производительность ресурсов и объемы сбережений:

$$c(t) = \frac{p(t)m(t)}{y(t)} \quad \left| \quad z(t) = \frac{y(t)}{m(t)} \quad \left| \quad s(t) = y(t)(1 - u(t) - c(t))\right.\right.$$

Доказательство утверждения проводится непосредственным вычислением указанных модельных переменных при условии, что управление $v(t)$ (линейно связанное с $u(t)$) имеет структуру двухступенчатого регулятора. Поскольку динамика потребления ресурсов подчиняется экспоненциальному закону $\dot{m}(t) = -v(t)m(t)$ с начальным уровнем m_0 , то для всех t от 0 до T_0 потребление ресурсов отвечает формуле $m(t) = m_0 \exp(-v_0 t)$, для последующих моментов времени, начиная от T_0 , расход подчиняется экспоненциальному закону $m(t) = m_0 \exp(-v_0 T_0 - b(t - T_0)/\alpha)$. Интегрируя полученные равенства для текущих объемов потребления $m(t)$, находим суммарный уровень использованных ресурсов $M(t)$ при учете того, что $M(0) = 0$.

Остальные величины, как было описано в начале статьи и приведено выше, зависят только от значений найденных модельных переменных. Утверждение доказано.

В следующем разделе приводятся результаты вычислительных экспериментов для модели роста с двухступенчатым регулятором.

Численные эксперименты

Для вычисления модельных переменных использовались данные, приведенные в работах [Tarasyev, Zhu 2012; Tarasyev, Zhu 2013; Usova, Tarasyev 2015; Tarasyev, Usova, Wang 2015; Кряжимский, Тарасьев, Усова, Ванг 2015], а именно $p_0 = 100,00$, $\bar{u} = 0,12$, $a = 64,335$, $b = 0,0686$, $\rho = 0,18$, $\alpha = 0,4091$, $\beta = 1,5226$, $M_0 = 1,8121 \cdot 10^6$, $m_0 = 0,09847$.

Согласно исследованиям [Tarasyev, Zhu 2013; Usova, Tarasyev 2015; Tarasyev, Usova, Wang 2015; Кряжимский, Тарасьев, Усова, Ванг 2015] задачи оптимального управления [Tarasyev, Zhu 2013; Usova, Tarasyev 2015; Кряжимский, Тарасьев, Усова, Ванг 2015] стационарный уровень выпуска y^* равен $1,024 \cdot 10^9$ и превосходит величину $am_0^\alpha (bM_0/m_0 + 1 - \alpha) = 3,146 \cdot 10^7$, т. е. $y^* > am_0^\alpha (bM_0/m_0 + 1 - \alpha)$. Следовательно, начальный уровень инвестиций определяется неединственным образом, так как существует два решения T_{01} и T_{02} ($0 < T_{min} \leq T_{01} < T_* < T_{02}$) уравнения $G(T) = 0$ (см. **Утверждение 2**).

Численное решение уравнения $G(T) = 0$ дает следующие корни: $T_{01} = 173,1942$ и $T_{02} = 255,5508$. Соответствующие этим моментам переключения начальные управления определяются значениями: $u_{01} = 0,0141$ и $u_{02} = 0,0451$. Функционал качества для найденных пар значений (T_{01}, u_{01}) и (T_{02}, u_{02}) равен $J_1 = 18,4393$ и $J_2 = 17,7087$ соответственно. Поскольку $J_1 > J_2$, считаем, что первая пара более предпочтительна с точки зрения исходной задачи оптимизации, где необходимо максимизировать функционал качества $J(m_0, M(0), u)$ на траекториях динамической системы.

Ниже представлены графики траекторий развития ряда параметров модели, описанных в **Утверждении 3**, дополнительно представлен график регулятора $u(t)$ двухступенчатого вида и подынтегральной функции $e^{-\rho t} \ln(s(t))$ функционала качества $J(m_0, M(0) = 0, u)$ процесса управления $u(t)$. При построении решений использовались следующие расчетные показатели: момент смены управления $T_0 = T_{01} = 173,1942$, начальное управление $u_0 = u_{01} = 0,0141$, что соответствует значению $v_0 = v_{01} = -0,0797$ вспомогательной управляющей переменной $v(t) = (\beta u(t) - b)/(1 - \alpha)$.

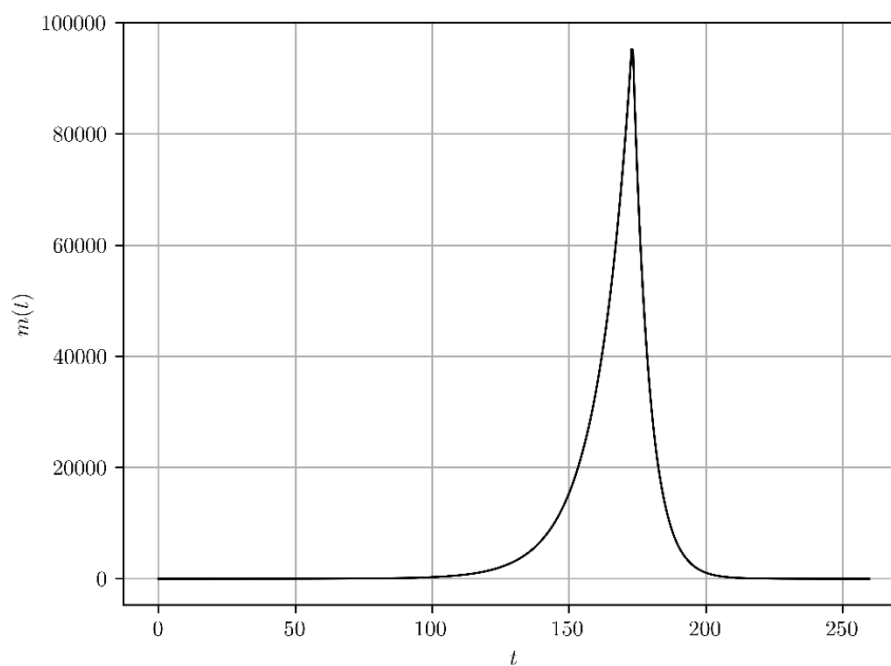


Рис. 2. Расход материалов, $m(t)$ ³
Fig. 2. The Consumption of Materials, $m(t)$

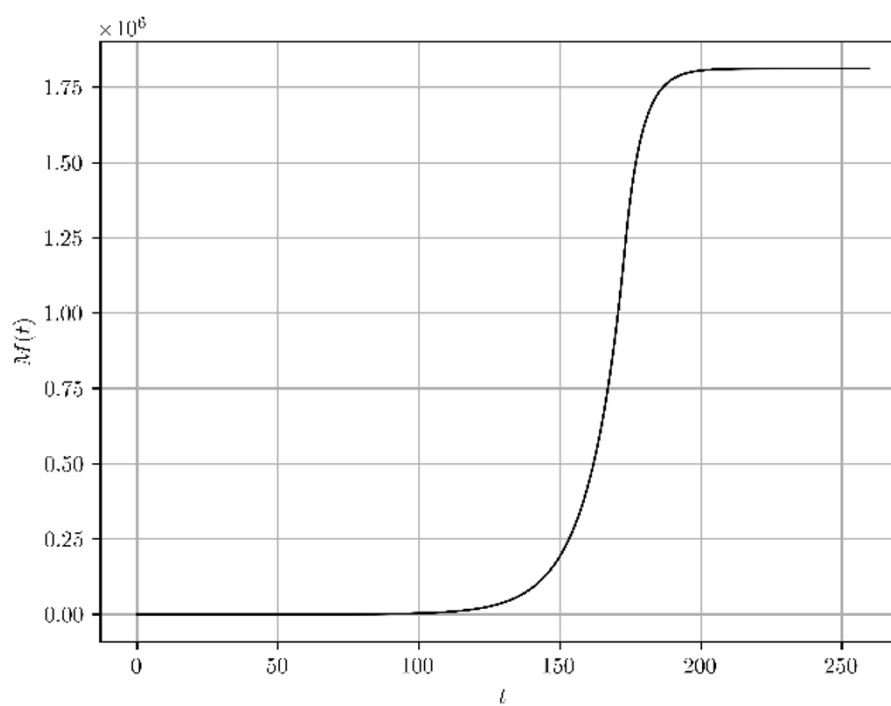


Рис. 3. Суммарный объем потребления ресурсов, $M(t)$
Fig. 3. Total Resource Consumption, $M(t)$

³ Рисунки 2–11 составлены авторами.

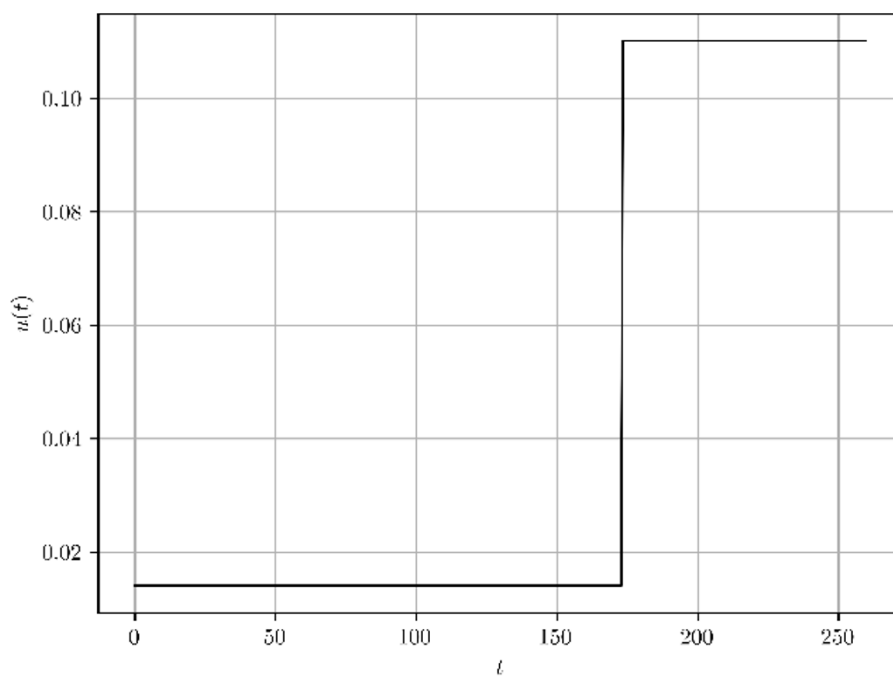


Рис. 4. Регулятор двухступенчатого вида, $u(t)$

Fig. 4. The Two-step Regulator, $u(t)$

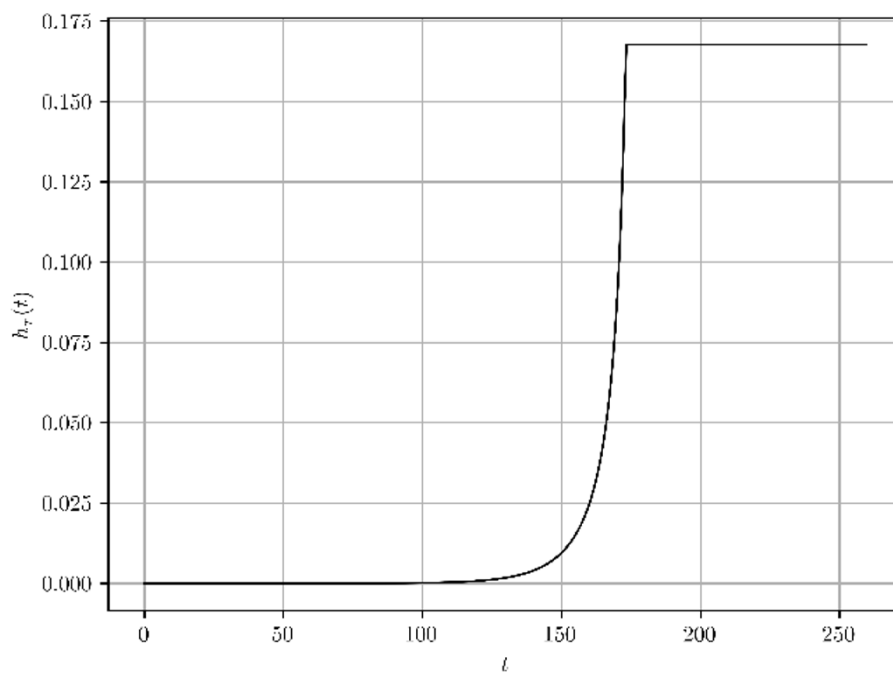


Рис. 5. Риски истощения ресурсов, $h_r(t)$

Fig. 5. Risks of Resources Depletion, $h_r(t)$

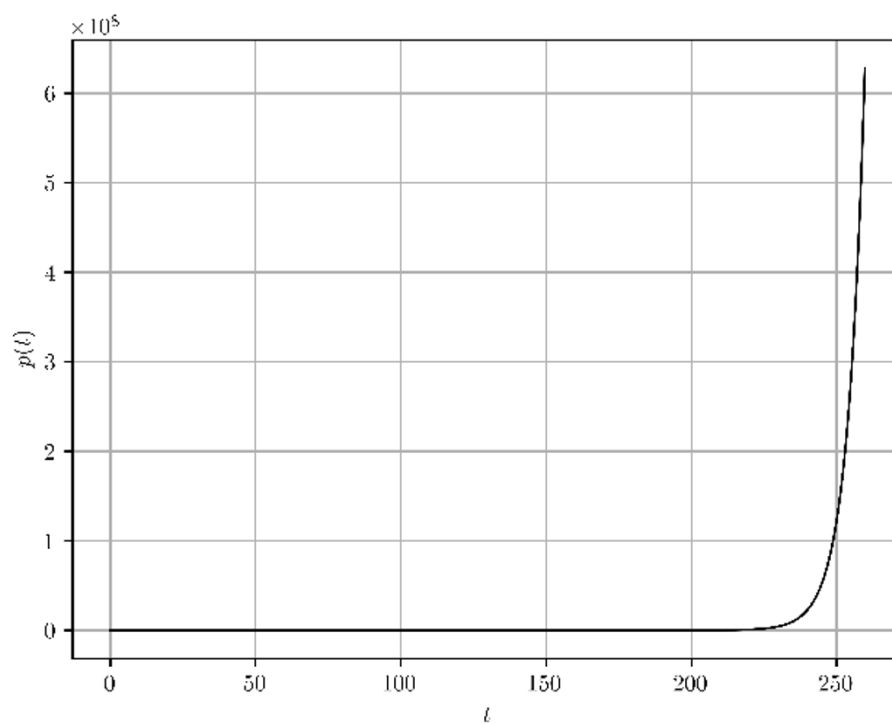


Рис. 6. Цены на ресурсы, $p(t)$
Fig. 6. Prices for Resources, $p(t)$

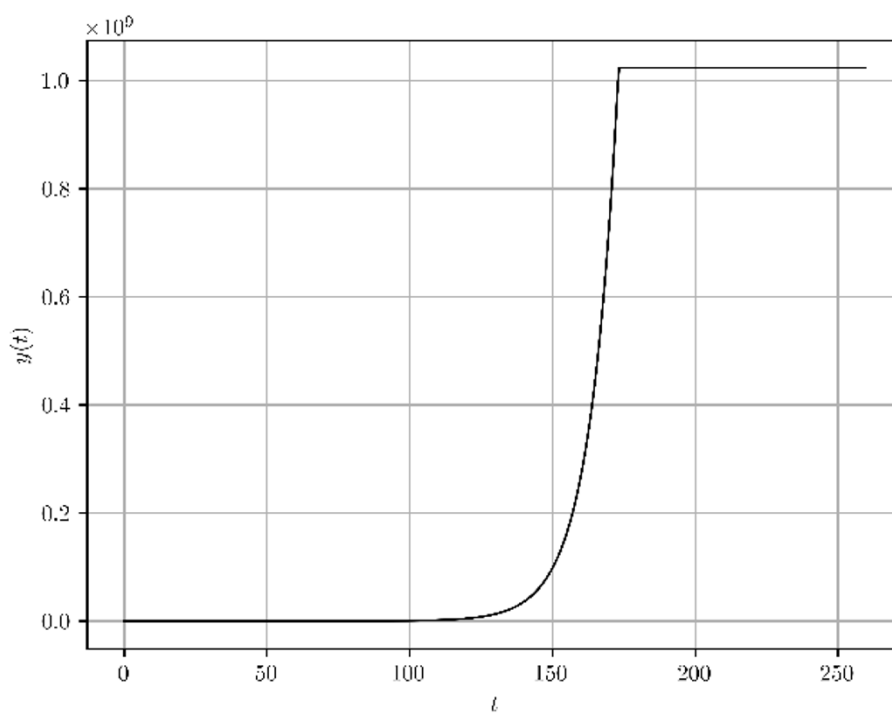


Рис. 7. Объем выпуска, $y(t)$
Fig. 7. The Volume of Production, $y(t)$

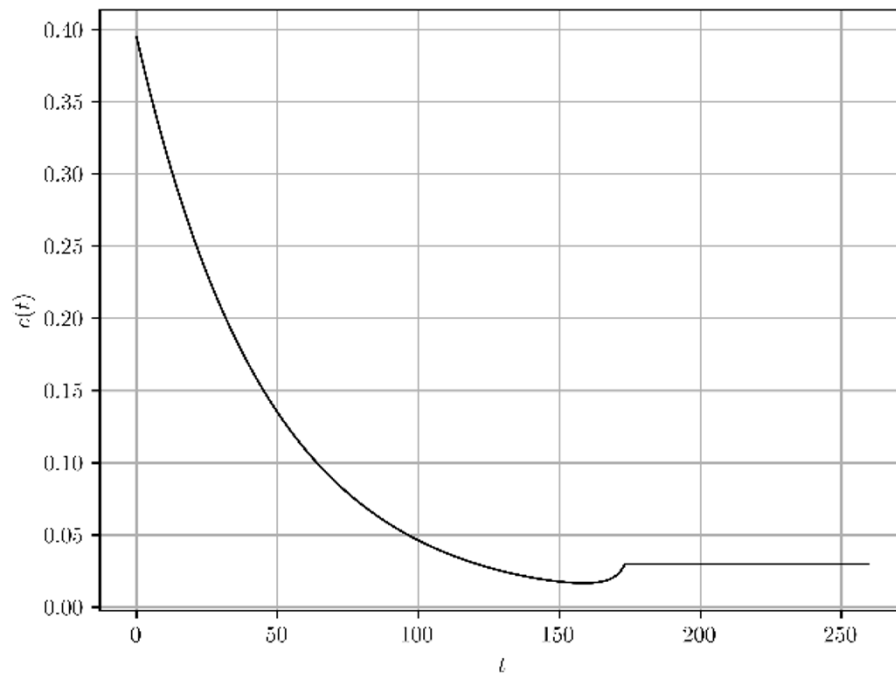


Рис. 8. Стоимость ресурсов в доле выпуска, $c(t)$
Fig. 8. The Cost of Resources as a Share of Production, $c(t)$

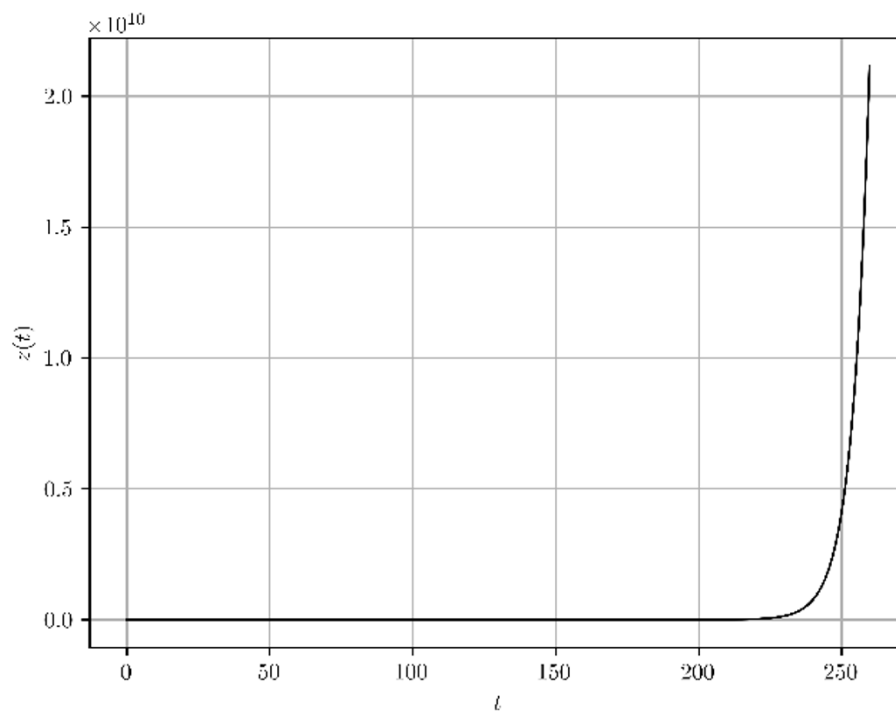


Рис. 9. Продуктивность ресурсов, $z(t)$
Fig. 9. The Productivity of Resources, $z(t)$

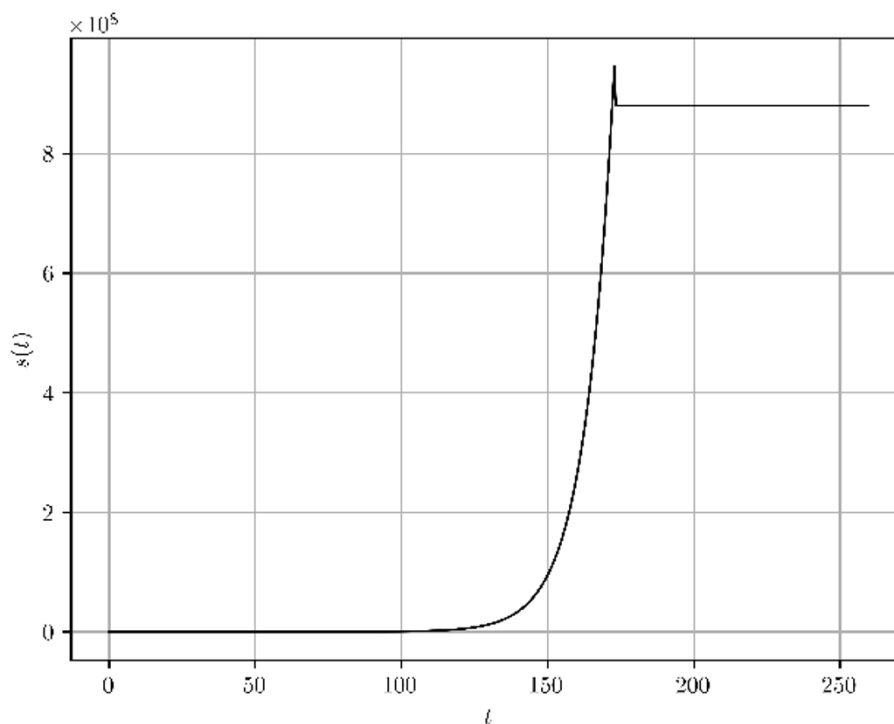


Рис. 10. Сбережения, $s(t)$

Fig. 10. Savings, $s(t)$

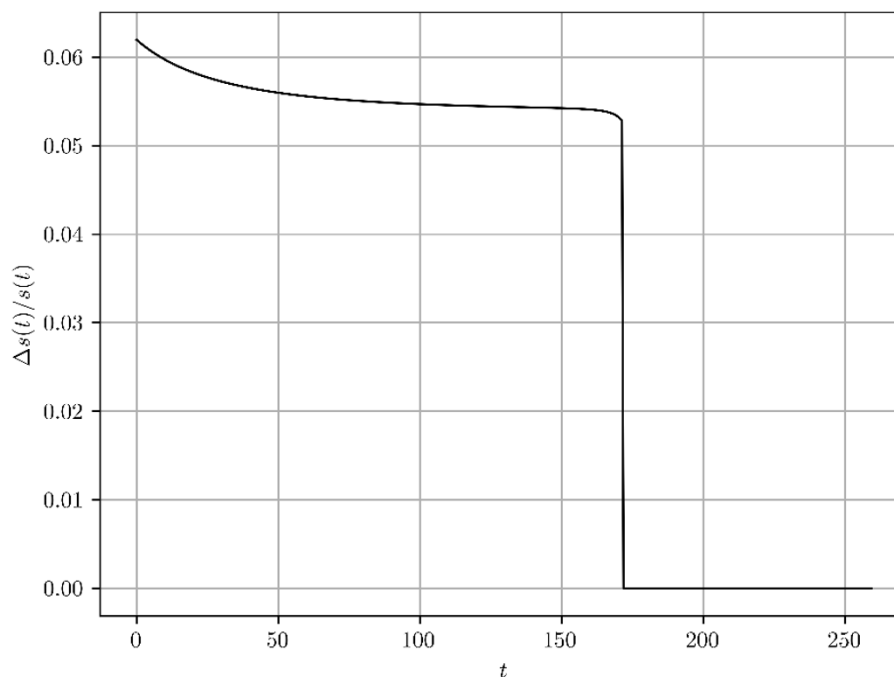


Рис. 11. Относительный прирост сбережений, $\Delta s(t)/s(t)$

Fig. 11. A Relative Increase in Savings, $\Delta s(t)/s(t)$

На рисунке 2 представлены траектории потребления ресурсов $m(t)$, которые демонстрируют экспоненциально растущую динамику до момента переключения и, в последующем, экспоненциально-убывающий тренд. Показатели первоначального роста и последующего убывания различны. Рост происходит менее интенсивно, со скоростью $|v_0| = 0,0797$, а темп убывания составляет величину $b/a = 0,1677$, превосходя темпы роста более чем в 2,1 раза. Однако именно такое соотношение обеспечивает низкие показатели рисков $h_c(t)$ истощения ресурсов, которые в асимптотике приближаются к уровню $b/a = 0,1677$, не превосходя его (см. рис. 5). Суммарный объем потребленных ресурсов $M(t)$ имеет S-образный тренд (см. рис. 3) с уровнем насыщения, обусловлен-

ным фазовыми ограничениями на изначальный общий запас ресурсов $M_0 = 1,8121 \cdot 10^6$. Структура двухступенчатого регулятора $u(t)$ графически продемонстрирована на рисунке 4. Стартуя с уровня $u_0 = 0,0141$, что составляет долю в 1,4 % от уровня выпуска $y(t)$, инвестируемую в повышение продуктивности ресурсов $z(t)$, в момент времени T_0 регулятор $u(t)$ переключается на более интенсивную инвестиционную стратегию $u^* = b/(\alpha\beta) = 0,1101$, составляющую 11,01 % от уровня выпуска $y(t)$, что гарантирует ресурсную обеспеченность производств.

Цены на ресурсы $p(t)$ демонстрируют неограниченный рост (см. рис. 6), что обусловлено их обратной пропорциональностью объемам доступного запаса ресурсов. На рисунке 7 изображена траектория роста выпуска $y(t)$, обладающего уровнем насыщения y^* . Темпы роста производства зависят от инвестиционной стратегии, и до момента переключения T_0 объемы выпуска растут экспоненциально с показателем роста $b - \alpha v_0 = 0,1012$.

Доля выпуска $y(t)$, которая расходуется на закупку ресурсов в объеме $m(t)$ по ценам $p(t)$, изображена на рисунке 8. Она, в отличие от растущих темпов инвестирования $u(t)y(t)$, в целом обладает нисходящим трендом, что объясняется снижением ресурсозависимости производств. Предельный показатель доли расходов выпуска на закупку ресурсов равен $c^* = 0,0297$, что составляет 2,97 % от объемов производства $y(t)$, по абсолютной величине предельные расходы на закупку достигают величины $\lim_{t \rightarrow +\infty} (m(t)p(t)) = p_0 M_0 h_\tau^* = p_0 M_0 b/\alpha = 30,3862$ млн условных денежных единиц.

На рисунке 9 изображена динамика роста продуктивности ресурсов $z(t)$, определяемая количеством материалов, затраченным на единицу выпуска $z(t) = y(t)/m(t) = ae^{bt}m^{-(1-\alpha)}(t)$. Подставляя в полученное равенство функцию расхода ресурсов, получим выражение для их продуктивности

$$z(t) = \frac{a}{m_0^{1-\alpha}} \begin{cases} e^{(b+(1-\alpha)v_0)t}, & t \in [0, T_0], \\ e^{(b+(1-\alpha)v_0)T_0} e^{\frac{b}{\alpha}(t-T_0)}, & t \geq T_0. \end{cases}$$

Важно отметить, что, исходя из области определения $\mathcal{J}$ параметра управления v , его значения не могут быть ниже уровня $-b/(1-\alpha)$, который отвечает нулевому порогу инвестиций. Следовательно, параметр начального уровня управления отвечает неравенству $v_0 \geq -b/(1-\alpha)$, откуда можно сделать вывод о том, что экспоненциальный темп роста продуктивности $z(t)$ на отрезке времени $[0, T_0]$ до момента смены режима регулятора на стационарный $v^* = b/\alpha$ определяется положительным показателем роста, равным $b + (1-\alpha)v_0 = 0,0215$. Этот показатель в 7,8053 меньше темпа роста продуктивности ресурсов, отвечающего стационарному уровню $v^* = b/\alpha = 0,1677$.

Рост сбережений $s(t)$ изображен на рисунке 10. Данный параметр модели линейно зависит от управления $u(t)$, а именно $s(t) = y(t) - u(t)y(t) - p(t)m(t)$. Двухступенчатая структура регулятора $u(t)$ приводит к тому, что функция $s(t)$ терпит разрыв в точке T_0 смены режимов управления. До переключения сбережения растут по показательному закону, начиная с уровня 14,7248 условных денежных единиц, а после переключения на стационарный режим их уровень выходит на константный показатель, равный $s^* = 0,8805$ млрд условных денежных единиц. Здесь интересно отметить, что начальное распределение выпуска $y_0 = am_0^\alpha$ имеет следующую структуру: на инвестиции тратится 1,4110 %, на закупку ресурсов – 39,5090 %, на сбережения – 59,0800 % от y_0 . Предельное перераспределение уровня выпуска y^* выглядит следующим образом: 11,0130 % на инвестиции, 2,9686 % на закупку ресурсов и 86,0184 % на сбережения. Таким образом, значительно падает доля расходов на закупку ресурсов, уменьшаясь на 36,5404 %. При этом происходит рост расходов на инвестиции – на 9,602 %, а также рост сбережений, составляющий 26,9384 % в сравнении с первоначальной долей выпуска, направленной на сбережения.

На последнем графике (см. рис. 11) изображен относительный прирост сбережений, который демонстрирует нисходящий тренд. После момента времени переключения T_0 прирост сбережений останавливается в принципе, поскольку они выходят на стационарный уровень $s^* = y^*(1 - u^* - c^*)$.

Заключение

В работе рассмотрена модель развития экономики региона в условиях строгого контроля за ресурсами производства ввиду их исчерпаемости. В модели представлен многосторонний контроль за ресурсами. Прежде всего, в модель вводятся фазовые ограничения $0 \leq M(t) \leq M_0$. Далее осуществляется разработка сценариев развития, предусматривающих политику снижения ресурсозависимости путем инвестирования в научно-технологический сектор экономики с целью разработки более эффективных производственных процессов с точки зрения потребления материалов. Вследствие повышения продуктивности ресурсов, высвобожденные от расходов на закупку материалов средства могут быть направлены как на вложения в дальнейшие научно-технические разработки, так и на увеличение объемов сбережений. Последнее, в свою очередь, является показателем качества процесса управления в оптимизационной задаче. Таким образом, все три задачи, возлагаемые на управление, могут быть решены при помощи двухступенчатого регулятора, описанного в работе, если параметры модели удовлетворяют двум ограничениям: предельный уровень выпуска y^* превосходит изначальный $y(0)$, а начальный уровень риска истощения ресурсов m_0/M_0 ниже предельного b/a . Оба условия вполне логичны и выполняются для многих экономик. Здесь важно отметить, что двухступенчатый регулятор не доставляет оптимального решения задачи, однако построенные траектории являются допустимыми.

Завершают работу результаты численных экспериментов, которые наглядно подтверждают полученные теоретические выводы.

Список источников

- Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности : Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М. : Наука, 1965. 524 с.
- Караев А. К., Коновалов В. В. Логистическая модель динамики развития информационных и экономических систем // Экономика. Налоги. Право. 2011. № 4. С. 28–37. EDN MSAUDM.
- Коновалов В. В., Караев А. Н., Мельничук М. В. Моделирование динамики развития экономических систем на основе логистической модели // Транспортное дело России. 2012. № 6-2. С. 73–77.
- Кряжмский А. В., Тарасьев А. М., Усова А. А., Ванг В. Пропорциональный экономический рост в условиях ограниченности природных ресурсов // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 138–156. DOI 10.1134/S0371968515040123. EDN UWEWUB.
- Усова А. А., Тарасьев А. М. Исследование модели роста с логистической функцией опасности истощения ресурсов // Математическая теория игр и ее приложения. 2025. Т. 17, № 4. С. 81–94. EDN AAWBTY.
- Tarashev A., Usova A. Cyclic behavior of optimal trajectories in growth models // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49, issue 18 : 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2016 (Monterey, California, USA, 23–25 August 2016) / ed. by A. Teel. P. 1048–1053. DOI 10.1016/j.ifacol.2016.10.306.
- Tarashev A., Usova A., Wang W. Hamiltonian Trajectories in a Heterogeneous Economic Growth Model for Optimization Resource Productivity // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, issue 25 : 16th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization CAO'2015 (Garmisch-Partenkirchen, Germany, 6–9 October 2015) / ed. by S. W. Pickl, M. Zsifkovits. P. 74–79. DOI 10.1016/j.ifacol.2015.11.062.

- Tarasyev A., Zhu B. Optimal Proportions in Growth Trends of Resource Productivity // Green Growth and Sustainable Development / ed. by J. Crespo-Cuaresma, T. Palokangas, A. Tarasyev. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2013. P. 49–66. DOI 10.1007/978-3-642-34354-4_3.
- Tarasyev A., Zhu B. Optimal proportions in growth trends of resource productivity // IFAC Proceedings Volumes. 2012. Vol. 45 (25) : 15th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (Rimini, Italy, 2012). P. 182–187. (Control Appl. Optimiz.; Vol. 15, pt. 1). DOI 10.3182/20120913-4-IT-4027.00021.
- Usova A. A., Tarasyev A. M. Optimal Control Problem on Optimization of Resources Productivity // Current Trends in Analysis and Its Applications : Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Kraków 2013 / ed. by V. Mityushev, M. Ruzhansky. Heidelberg etc. : Springer, 2015. P. 133–142. (Trends in Mathematics). DOI 10.1007/978-3-319-12577-0_18.

Информация об авторах

Анастасия Александровна Усова, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия).

Александр Михайлович Тарасьев, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Россия).

Information about the authors

Anastasiia A. Usova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS) (Yekaterinburg, Russia).

Alexander M. Tarasyev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Chief Researcher at the N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS) (Yekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию | Submitted 22.07.2026.

Одобрена после рецензирования | Revised 03.08.2026.

Принята к публикации | Accepted 03.08.2026.